



# **MODELO MATEMÁTICO DE TIPO VALOR MEDIO DE UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA Y ESTIMACIÓN DE ESTADOS USANDO TÉCNICAS BAYESIANAS**

**Mónica Patricia Hernández Lordui**

Universidad EAFIT  
Departamento de Ciencias Básicas  
Medellín, Colombia  
2013



# MODELO MATEMÁTICO DE TIPO VALOR MEDIO DE UN MOTOR DE COMBUSTIÓN INTERNA Y ESTIMACIÓN DE ESTADOS USANDO TÉCNICAS BAYESIANAS

**MÓNICA PATRICIA HERNÁNDEZ LORDUI**

Ingeniera en Instrumentación y Control

Trabajo enviado al Departamento de Ciencias Básicas para el cumplimiento de uno de los  
requisitos para obtener el título de:

**Master of Science en Matemáticas Aplicadas**

Directores:

Dr Adalberto Gabriel Díaz Torres

Dra. Olga Lucía Quintero.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
MEDELLÍN, COLOMBIA  
14 DE MARZO DE 2013



**Nota de aceptación**

-----  
-----  
-----  
-----  
-----

-----  
Nombre del coordinador de la maestría  
Coordinador de la maestría

-----  
Adalberto Gabriel Díaz Torres  
Olga Lucía Quintero  
Director del proyecto

Medellín, Fecha -----



# Reconocimientos

Este trabajo se lo dedico a mi hijo Hector, a mi abuela que ya no se encuentra conmigo, a mi madre y a Jose Albeiro. A mi Dios, que puso en mi camino todo tipo de tropiezos sin los cuales no hubiera sido posible esta nueva idea maravillosa de trabajo de grado, sin los cuales no hubiera sido posible conocer los grandes amigos que tengo en este momento. El me mostró que de las circunstancias positivas y negativas hay que sacar provecho y siempre puede haber un crecimiento.

A mi madre, Esperanza, le agradezco su decisión de darme vida con todo el peso de la soledad, la crudeza, la angustia. Gracias a esta decisión he vivido y construido ... Le agradezco su preocupación y tenacidad para ayudar a realizar mis sueños ... por cuidar de mi hijo Hector como su propio hijo, brindarle estabilidad emocional en mis ausencias.

A mi otra madre que ya no está físicamente conmigo, mi abuela, Ana Alejandrina Gómez, por ser el soporte durante toda mi vida, por ser: la autoridad, el amor, la cordura, mi salvavidas, el ejemplo, la ternura y la sabiduría, en ese orden a medida que yo maduraba y comprendía. Gracias abuela, te extraño mucho ...

A todos mis tíos, por quererme, apreciarme y acompañarme desde mi infancia, nunca se fueron y me dieron ejemplo continuo de tenacidad y perseverancia académica. A mi hermano, por quererme como soy.

Agradezco a mis amigas: Mónica Jiménez y su madre Nelly, Claudia Fonnegra y Carolina Mira Hernández por brindarme una amistad tranquila, leal y desinteresada. Quiero decirles que estuvieron en momentos claves ... de amargura, de felicidad, de cambios en mi vida y sólo les puedo decir que las quiero mucho y que agradezco a Dios por ponerlas en mi vida.

Al Dr. Gabriel Adalberto Díaz Torres por sus enseñanzas académicas y acerca de la vida. Por brindarme el tiempo, la paciencia y las oportunidades para formarme, crecer y superarme en este maravilloso lugar que es la Universidad EAFIT. Agradezco tremendamente a la Dra. Olga Lucía Quintero por encontrar inventivas académicas en problemas de investigación con apariencia simple, esto gracias a su agudeza intuitiva, a su prodigiosa imaginación. Le agradezco que sin saber nada de mí me haya recibido en su oficina para reformular un tema de investigación casi perdido y brindarle estatus académico.

También le agradezco sus regaños, sus correcciones, sus fantasías académicas con el problema de investigación; pero sobretodo quedo agradecida por su valiosa amistad.

Finalmente, quiero agradecer a Edwin, Hugo Murillo en los laboratorios de física, al Profesor Santiago París por acogerme en su oficina y brindarme apoyo, en general agradezco a todas las personas de la Universidad y a la Universidad misma por permitirme desarrollarme en sus claustros y acoger personas de altas calidades humanas.

Medellín, 1 de Octubre de 2012



## Resumen

En el presente trabajo se obtiene el modelo matemático orientado al control de un motor de combustión interna de ignición por chispa. El modelo aplica ecuaciones de primeros principios con no-linealidades y parámetros desconocidos. Las ecuaciones aplicadas al modelo están explicadas mediante relaciones termodinámicas conocidas en la literatura como “Mean Value Engine Modelling” (MVEM). La MVEM describe un modelo matemático orientado al control para las máquinas de combustión interna de ignición por chispa. Este enfoque simplifica los procesos termodinámicos del motor en subsistemas independientes de entrada-salida, continuos en el tiempo. El modelo resultante está definido por tres submodelos: dinámica del aire en el múltiple de admisión, dinámica del proceso de combustión y dinámica rotacional en el eje de salida. El modelo es compactado como un sistema en variables de estado, el cual se discretiza para aplicar técnicas de estimación bayesianas con el fin de solucionar un problema de estimación del estado del modelo dinámico del motor de combustión. Para ello, se construye la función de densidad de probabilidad (PDF) de los estados sobre la base de la información disponible (mediciones); se asume una distribución gaussiana de las variables no lineales del estado. Se obtiene un modelo con un grado de exactitud aceptable y un algoritmo de filtrado que aproxima con alto grado de exactitud los estados del modelo.

# Contenido

Reconocimientos	VII
Resumen	IX
Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	4
1.2. OBJETIVOS . . . . .	6
1.2.1. Objetivo general . . . . .	6
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	6
1.3. IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN . . . . .	6
1.4. HIPÓTESIS O PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN . . . . .	7
1.5. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO . . . . .	8
<b>2. Modelación matemática de un MCI</b>	<b>9</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	9
2.2. FUNDAMENTOS PARA LA MODELACIÓN DE VALOR MEDIO “MVEM”	9
2.2.1. Sistema de aire . . . . .	10
2.2.2. Flujo másico en una válvula . . . . .	11
2.2.3. Flujos de masa en un MCI . . . . .	13
2.2.4. Velocidad en un MCI . . . . .	13
2.3. MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL MCI . . . . .	14
2.3.1. Estimación de los parámetros: eficiencia volumétrica y eficiencia térmica.	19
2.3.2. Modelo dinámico en espacio de estados del MCI en tiempo continuo .	20
2.3.3. Modelo dinámico estocástico del MCI en tiempo discreto . . . . .	22
<b>3. Filtrado bayesiano</b>	<b>25</b>
3.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	25
3.2. PROBLEMA DE FILTRADO ESTOCÁSTICO . . . . .	25

3.3. SISTEMA DINÁMICO ESTOCÁSTICO . . . . .	27
3.4. ESTIMACIÓN BAYESIANA RECURSIVA . . . . .	30
3.5. MÉTODO MONTE CARLO SECUENCIAL (SIS) . . . . .	34
3.6. FILTRO DE PARTÍCULAS (“BOOTSTRAP”) . . . . .	36
3.7. PSEUDOCÓDIGO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO DE PARTÍCULAS . . . . .	37
<b>4. Resultados y análisis de resultados de la modelación del MCI y el filtrado bayesiano</b>	<b>39</b>
4.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	39
4.2. REGIMENES DE TRABAJO CONSIDERADOS PARA EL SISTEMA FÍSICO	39
4.3. ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO DEL MCI EN DINÁMICA RALENTI . . . . .	41
4.4. ANÁLISIS DEL MODELO MCI EN DINÁMICA ACELERADA . . . . .	44
4.5. VALIDACIÓN DE LOS ESTADOS X3 Y X4 DEL MODELO DEL MCI . .	47
4.6. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN DEL FILTRO EN RALENTI Y ACELERACIÓN . . . . .	49
4.7. ESTIMACIÓN DEL ESTADO CON REGLA DE BAYES VIA APROXIMACIONES MUESTREO MONTE CARLO. . . . .	53
4.8. COMPARACIONES ENTRE EL PRIMER MOMENTO DE LA PDF DEL ESTADO ESTIMADO CON EL PRIMER MOMENTO DE LA PDF DEL ESTADO VERDADERO . . . . .	55
<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>57</b>
<b>A. Conceptos</b>	<b>59</b>
<b>B. Código del filtro de partículas o “bootstrap”.</b>	<b>62</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Lista de Figuras

1-1. Esquema entradas-estados-salidas para un motor de combustión interna de ignición por chispa. . . . .	2
1-2. Subsistemas que se modelan del MCI. . . . .	4
2-1. Entradas, estados y salidas del depósito (múltiple de admisión) . . . . .	10
2-2. Modelo del flujo entre dos depósitos conectados por una válvula . . . . .	12
2-3. Estructura del modelo de valor promedio (MVEM) del MCI. . . . .	15
3-1. Pasos y PDF calculadas en cada paso del filtro. . . . .	32
4-1. Escalones de excitación del MCI. . . . .	40
4-2. Banco de ensayo del MCI. . . . .	41
4-3. Validación del modelo matemático en dinámica ralenti del MCI. . . . .	42
4-4. Errores relativos y errores absolutos del modelado de presión en ralenti. . . .	43
4-5. Errores relativos y errores absolutos del modelado de velocidad en ralenti. . .	44
4-6. Validación del modelo matemático en dinámica acelerada del MCI. . . . .	45
4-7. Errores relativos y errores absolutos del modelado de presión en aceleración. .	46
4-8. Errores relativos y errores absolutos del modelado de velocidad en aceleración. .	47
4-9. Flujos máxicos de fase vapor y fase líquida en régimen ralenti y acelerado. . .	48
4-10. Estimaciones del filtro de partículas con 100 partículas. . . . .	49
4-11. Estimaciones del filtro de partículas con 500 partículas. . . . .	50
4-12. Estimación del filtro con diferente número de partículas. . . . .	51
4-13. Estimación del filtro de partículas con diferente número de partículas. . . . .	52
4-14. Histograma de la estimación de los estados en ralenti con $N_p = 500$ . . . . .	54
4-15. Histograma de la estimación de los estados en aceleración con $N_p = 500$ . . .	55
4-16. Comparación entre la esperanza del estado estimado con la esperanza del estado verdadero. . . . .	56

# Lista de Tablas

4-1. Comparación de las desviaciones de la estimación para diferente número de partículas. . . . .	51
--	----

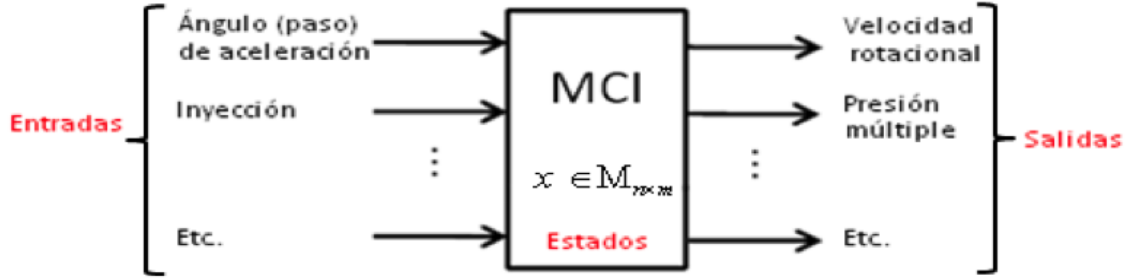


# Capítulo 1

## Introducción

Un sistema físico como el motor de combustión de ignición por chispa (en adelante MCI), permite modelar su comportamiento en función del tiempo a partir de sus estados. Estos, representan la mínima cantidad posible de información para representar el futuro y la salida actual del sistema ante una o varias entradas. Para determinar el estado, en ocasiones, se deben realizar mediciones (observaciones) con dispositivos físicos que entregan señales con ruido incorporado que proviene de fuente electrónica y mecánica, el cual le otorga a la medición un carácter aleatorio. Así mismo, el proceso físico que se quiere modelar se encuentra sometido a perturbaciones aleatorias que le confieren una naturaleza estocástica. El problema de determinar el estado a partir de la medición de las salidas del sistema cuando este se considera bajo un contexto estocástico se denomina problema de estimación o filtrado (Quintero, 2009; Poznyak, 2009; Bain & Crisan, 2009; Jazwinski, 2007; Chen, 2003).

Ahora bien, la estimación del estado se realiza partiendo de la representación matemática del MCI mediante ecuaciones diferenciales que relacionen la información de las entradas, los estados y las salidas del sistema como se representa en la Fig. **1-1**. En condiciones reales estas ecuaciones son de naturaleza no lineal y adicionalmente, deben contener las componentes estocásticas asociadas a las incertidumbres del sistema y las observaciones; con el fin de reflejar un modelo más coherente con el proceso real. La adición de incertidumbres le da una constitución de aleatoriedad al sistema y lo ubica bajo los supuestos, propiedades y leyes de la teoría de probabilidades y los procesos estocásticos. La denominación matemática de “estado”, bajo este nuevo enfoque, asume la nueva condición de “variable aleatoria” junto con todas las propiedades que esto implica: el estado queda completamente caracterizado mediante su función de densidad de probabilidad (PDF). Bajo esta nueva formulación, la estimación del estado se desarrolla utilizando un modelo probabilístico que se asume como reflejo del sistema físico (Chen & Liu, 1998).



**Figura 1-1:** Esquema entradas-estados-salidas para un motor de combustión interna de ignición por chispa.

La PDF de un sistema estocástico define la forma como se propaga la información del estado dentro del modelo probabilístico, es decir, refleja si la relación entre el estado y su componente estocástica (incertidumbre) es del tipo gaussiana o no. De la misma forma, establece una relación entre las observaciones y sus ruidos asociados. El conocimiento específico de esta relación junto con las no-linealidades del sistema definen las técnicas matemáticas para atacar el problema de la reconstrucción o estimación de los estados, desde un punto de vista probabilístico.

La formulación de un sistema dinámico del MCI como un espacio de estados probabilístico y el requerimiento de la estimación del estado a partir de nuevas medidas recibidas, sitúa el problema de filtrado en la perspectiva bayesiana, que es la de interés en este trabajo. Los primeros en abordar el problema de filtrado estocástico bajo este enfoque fueron Ho y Lee (Ho & Lee, 1964). Posteriormente, desde el marco de espacio de estados dinámico (Sorenson & Alspach, 1971; West, 1981; Kramer & Sorenson, 1988; West & Harrinson, 1997). El filtrado bayesiano recursivo trabaja con la función de densidad de probabilidad condicional del estado dadas las observaciones. Esta densidad reúne toda la información acerca del estado del sistema, el cual está contenido en las medidas disponibles y así todas las estimaciones pueden ser construidas a partir de esta densidad (Jaswinski, 2007; Gordon et al., 1993). El teorema de Bayes es el mecanismo para actualizar el conocimiento previo del estado representado en la PDF condicional previa, utilizando la evidencia observacional; dando lugar a la reconstrucción recursiva de la PDF condicional a posteriori y finalmente la mejor estimación del estado.



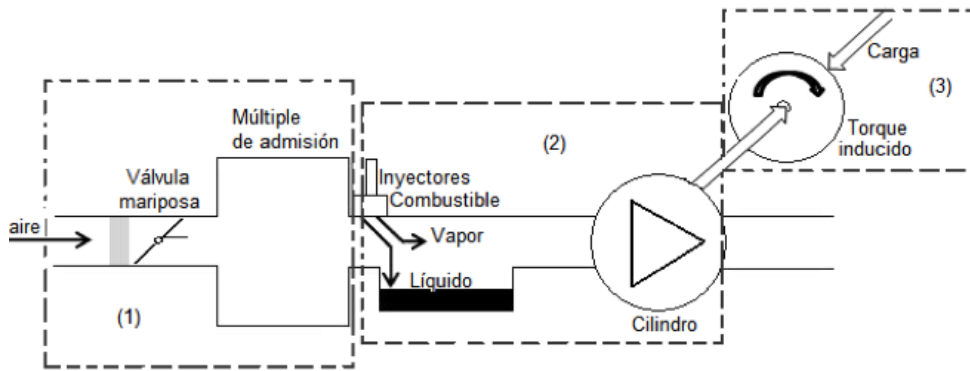
La solución al problema de filtrado lineal-gaussiano fue resuelta por el filtro de Kalman “KF” (Kalman, 1960). Este algoritmo propaga y actualiza la media y la covarianza del estado gracias a que la PDF se mantiene constante en cada iteración del filtro. La técnica del KF proporciona una solución óptima bajo el criterio de minimización del error medio cuadrático asumiendo condiciones de normalidad (Chen, 2003). La estructura del algoritmo resuelve recursivamente el cálculo de la densidad a posteriori en forma exacta, es decir, que el filtro posee una deducción analítica (Sanjeev, 2009). Sin embargo, cuando no se conocen o verifican las características probabilísticas de los estados, como en el caso de sistemas con severas no-linealidades e incertidumbres no-gaussianas, no existe una solución analítica general para la PDF requerida y, por consiguiente deben realizarse aproximaciones subóptimas (Chen, 2003; Sanjeev et al., 2002; Gordon et al., 1993; Quintero, 2009). Un ejemplo de esta metodología es el filtro extendido de Kalman que aproxima las no linealidades del sistema aplicando localizadamente expansión en series de Taylor alrededor de la estimación a posteriori del estado, luego de ello, el KF puede ser aplicado (Shao et al., 2010, Gordon et al., 1993).

Otras aproximaciones subóptimas conocidas son: los métodos de aproximación basados en grillas y el filtro de partículas, este último es el que se aborda en el presente trabajo. El filtro de partículas o también filtro “bootstrap” es una clase de filtro bayesiano recursivo diseñado para sistemas dinámicos no lineales con perturbaciones no gaussianas. Este algoritmo aproxima la PDF del estado usando la técnica de muestreo Monte Carlo secuencial, la cual utiliza un conjunto de muestras aleatorias en vez de una función sobre el espacio de estados. El algoritmo se utiliza para abordar sistemas estocásticos complejos y con severas no linealidades que son analíticamente intratables o de integración numérica difícil.

La idea Básica del filtro de partículas o “bootstrap”, es usar un número de variables aleatorias independientes, llamadas partículas, muestreadas directamente del espacio de estados para representar la PDF a posteriori y actualizarla involucrando nuevas observaciones, vía la regla de Bayes; el sistema de partículas es propagado recursivamente respetando su localización en la región de más alta probabilidad gracias a un criterio de ponderación de las muestras (Shao et al., 2009; Chen, 2003; de Freitas, 2003; Sanjeev et al., 2002; Andrieu & Doucet, 2001; de Freitas et al., 2000; Liu & Chen, 1998; Gordon et al., 1993; Smith & Gelfand, 1992).

## 1.1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El modelado matemático de un MCI tiene fines en el desarrollo de sistemas de control que optimicen una función de eficiencia energética, económica y ambiental (Díaz & Hernández, 2011). Un enfoque termodinámico para modelar esta máquina es el de sistema abierto (Romero & Quintero, 2001; Gengel & Boles, 2008). En los modelos termodinámicos de sistema abierto, los procesos del motor que se modifican por la combustión, se tratan en forma independiente y se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas de primer orden para cada proceso. Los modelos de valor medio, en inglés, “Mean Value Engine Model” (MVEM), se orientan al desarrollo de sistemas de control (Hendricks & Sorenson, 1990; Hendricks, 1997; Rajamani, 2006; Guzzella & Onder, 2004) y al análisis de las dinámicas internas de la máquina. Los MVEM dividen las dinámicas del motor en tres submodelos que se aprecian en la Fig. 1-2 (1) modelo múltiple de admisión, (2) modelo del combustible y (3) modelo de potencia. Cada bloque señalado involucra las variables internas representativas en la ecuación de estados.



**Figura 1-2:** Subsistemas que se modelan del MCI.

En los MVEM se desprecian los ciclos discretos de la máquina y se asume que todos los procesos y efectos de la combustión evolucionan con el tiempo, siendo  $t$  la variable independiente. Por tanto, estos ofrecen un análisis de la respuesta temporal del sistema en estado estable y transitorio y son susceptibles de representación mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias.

El conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales arrojadas con la metodología de valor medio se puede compactar y expresar como un sistema dinámico en variables de estado, agrupando y mezclando en un mismo espacio de estados variables instantáneas o de ciclo corto y variables de tiempo continuo o de ciclo largo, las cuales miden su respuesta temporal en ciclos de la máquina (Hendrincks & Sorenson, 1990). Obviar el marco de respuesta temporal del sistema, es un aporte al estado del arte en la metodología MVEM, la cual es posible gracias a que la estimación del espacio de estado que se pretende desarrollar en este trabajo se aborda desde la perspectiva Bayesiana, que utiliza el modelo probabilístico del sistema dinámico en vez de las funciones definidas sobre el espacio de estados. Los modelos matemáticos orientados al control que se encuentran en la literatura (Aquino, 1981; Hendrincks & Sorenson, 1990; Guzzella, 2004; Rajamani, 2006) han realizado la reconstrucción o estimación de parámetros principalmente mediante mínimos cuadrados y regresión lineal; como aporte, este proyecto aplicará técnicas de estimación bayesiana recursiva para obtenerlos.

El modelo matemático del motor de combustión se obtiene analíticamente mediante las ecuaciones del MVEM y se integra al modelo de la observación que relaciona las salidas del sistema con los estados propuestos. Una discretización de la ecuación de estado es conveniente si se desea aplicar estimación bayesiana recursiva (Sanjeev et al, 2002), ya que la técnica por muestreo Monte Carlo es por aproximación secuencial de la PDF condicional a posteriori del estado, la secuencialidad implica que la evidencia observacional (mediciones) del proceso se tiene disponible en cada instante de tiempo  $k$ , definido como el periodo de muestreo en la base de datos tomada del proceso real. El problema de filtrado no lineal para el modelo matemático del motor se aborda como un problema de seguimiento del estado, es decir, se pretende desarrollar un filtro que siga al modelo, esto implica que la exactitud obtenida para el modelo afecta la estimación realista del filtro.

Finalmente, se plantea medir la exactitud del modelo y su correlación con el motor real. Las componentes estocásticas de las incertidumbres del modelo se asumen gaussianas pero manteniendo la no linealidad del sistema. Se utiliza Matlab como entorno de simulaciones. El modelo matemático que se obtiene debe ser fácilmente modificable para que pueda adaptarse a otra familia de motores de ignición por chispa esto exige una estructura modular que matemáticamente sea simple y compacta, con un mínimo de parámetros fijos. Así mismo, en la implementación del filtro de partículas se analiza su eficiencia estadística a partir del análisis de la media, histograma y las desviaciones estándar con diferentes números de partículas, se contrastan simulaciones del modelo, observaciones y estimaciones del filtro.

## 1.2. OBJETIVOS

### 1.2.1. Objetivo general

Obtener el modelo matemático del MCI alimentado con gasolina mediante la aplicación de primeros principios y la estimación de estados mediante la técnica de filtrado bayesiano.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Estudiar las leyes particulares que rigen el comportamiento dinámico del MCI de ignición por chispa y dentro de la literatura se buscan aquellas que lo orientan a la ingeniería de control.
- Realizar la descripción teórica de las ecuaciones que rigen el modelo matemático del MCI de ignición por chispa orientadas al control.
- Expresar el modelo matemático en forma simple y compacta como un sistema en espacio de estados.
- Obtener la estimación de los estados del modelo matemático aplicando un filtro bayesiano recursivo o “bootstrap”.
- Codificar el modelo matemático y el filtro bayesiano en Matlab® para simulaciones.
- Validar el modelo mediante para establecer niveles de exactitud.
- Validar la eficiencia estadística de la estimación del filtro.

## 1.3. IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

El MCI es una de las invenciones tecnológicas más importantes de los últimos cien años, particularmente por la aplicabilidad al sector automotriz, el cual mueve fuertemente la economía. Precisamente la necesidad de obtener vehículos que hagan un uso cada vez más eficiente de la energía de los combustibles lo vuelven un objeto de estudio importante para la ciencia y la ingeniería. Para ser consecuente con este objetivo, es necesario modelar los fenómenos presentes en esta máquina a términos matemáticos. Por tanto, un modelo de simulación del MCI es importante porque:

- Permite desarrollar una comprensión más detallada (causal) de los fenómenos que se presentan en el motor de combustión.
- Ahorra tiempo y dinero porque se reduce al mínimo el trabajo experimental de los montajes en el banco de pruebas.
- Sería relativamente rápido y fácil el ajuste de los parámetros del modelo si se tratase con otro tipo de referencia de motor de combustión. Además, sería posible simular entornos de operación diferentes (condiciones ambientales), parámetros de diseño (geometría de la válvula de mariposa, cilindrada, etc.)
- Sirve como plataforma de simulaciones para probar los algoritmos de control antes de ser aplicados al motor real.

Así mismo, en la ingeniería de control es importante poseer información del estado del modelo para aplicar posteriormente técnicas de control en lazo cerrado adicionando el estimador o filtro. El estimador entrega conocimiento preventivo del proceso, implicando algoritmos de control más eficientes. Por otro lado, la investigación actual en optimización de motores de la Universidad EAFIT, requiere el modelo y el estimador del motor de combustión con el cual se trabaja, para la aplicación de técnicas de “hardware in the loop” (HIL).

## 1.4. HIPÓTESIS O PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

- ¿Es posible modelar un motor de combustión de ignición por chispa mediante un sistema en el espacio de estados que compacta la integración de variables de distinto comportamiento dinámico de tal forma que se alcance una exactitud aceptable?
- A partir del modelo matemático obtenido del motor de combustión, ¿es posible aplicarle al modelo en espacio de estados un filtro bayesiano recursivo y estudiar su desempeño en la estimación del estado?

## 1.5. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

Este trabajo se desarrolla con el siguiente orden: En el capítulo 1 se introduce al problema de filtrado para sistemas dinámicos estocástico y se plantean los objetivos del problema particular tratado en el trabajo, el cual consiste en la modelación y la estimación de estados de dicho modelo. En el capítulo 2, se definen los fundamentos teóricos y matemáticos de la modelación del MCI y el desarrollo de las ecuaciones del modelo. En el capítulo 3, se definen los fundamentos matemáticos del filtrado bayesiano y se explica la implementación general mediante el pseudocódigo. En el capítulo 4 se muestra los resultados y el análisis de la modelación del MCI y el filtrado bayesiano aplicado al modelo. Posteriormente, se entregan las conclusiones del trabajo desarrollado.

## Capítulo 2

# Modelación matemática de un MCI

### 2.1. INTRODUCCIÓN

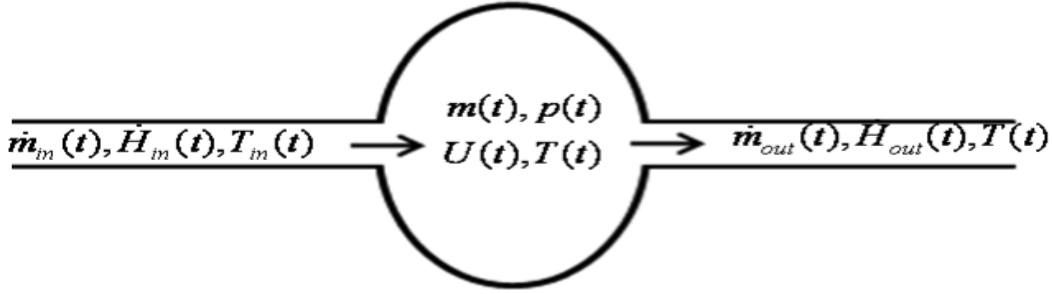
Este capítulo define los fundamentos termodinámicos que rigen las ecuaciones del modelo matemático del MCI. Adicionalmente, se describe la obtención del modelo matemático del MCI aplicando la modelación de valor medio y se encuentran experimentalmente los parámetros de las ecuaciones de eficiencia volumétrica y térmica del motor para tener un modelo realista. El modelo se discretiza para propósitos de filtrado y, se le adiciona una componente estocástica que refleja las incertidumbres características de un proceso real e igualmente se adiciona el ruido asociado a las observaciones (mediciones). Estas componentes se asumen gaussianas.

### 2.2. FUNDAMENTOS PARA LA MODELACIÓN DE VALOR MEDIO “MVEM”

La MVEM simplifica las características instantáneas de la combustión en MCI de ignición por chispa a efectos estáticos representados por ecuaciones diferenciales no lineales basadas en principios físicos con identificación experimental de algunos parámetros. Estos modelos no reflejan todos los fenómenos de la combustión, como por ejemplo variaciones de la presión como condición aleatoria (Guzzella & Onder, 2004). Sin embargo, son apropiados para desarrollar sistemas de control y optimización porque modelan el comportamiento entrada-salida con una precisión razonable, poseen señales de entrada, salida y perturbación moviéndose en un marco temporal.

### 2.2.1. Sistema de aire

El sistema de aire de un MCI tiene semejanza con un depósito en el cual se almacena masa y energía térmica (energía interna  $U(t)$ ). Las entradas y salidas están definidas a partir de los flujos de masa y de los flujos de entalpía  $H(t)$ , como se muestra en la Fig. 2-1. Se asume que el sistema es de parámetros concentrados sobre un volumen fijo, es decir, los estados termodinámicos (presión y temperatura, entre otras), se asumen iguales sobre todo el volumen. Asumiendo adicionalmente, que no hay transferencia de calor y masa hacia las paredes del depósito y, que no hay cambios en la energía potencial o cinética de los flujos, entonces se establecen las ecuaciones que describen la dinámica del depósito (ver Ec. 2-1).



**Figura 2-1:** Entradas, estados y salidas del depósito (múltiple de admisión)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t) &= \dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t) \\ \frac{d}{dt}U(t) &= \dot{H}_{in}(t) - \dot{H}_{out}(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

Asumiendo que los flujos se pueden modelar como un gas perfecto, el acople de estas dos ecuaciones se realiza por la ley de gases ideales, mostrada en la Ec. 2-2 y asumiendo volumen constante.

$$p(t) \cdot V = m(t) \cdot R \cdot T(t) \quad (2-2)$$



Y también por las siguientes relaciones de calor mostradas en la Ec. 2-3:

$$\begin{aligned} U(t) &= c_v \cdot T(t) \cdot m(t) \\ \dot{H}(t) &= c_p \cdot T_{in}(t) \cdot \dot{m}_{in}(t) \\ \dot{H}_{out} &= c_p \cdot T(t) \cdot \dot{m}_{out}(t) \end{aligned} \quad (2-3)$$

Donde  $c_v$  es calor específico a volumen constante con unidades  $[J/kgK]$ ;  $c_p$ , calor específico a presión constante con unidades  $[J/kgK]$ ;  $R$ , constante de los gases y  $k = c_p/c_v$  relación de calores específicos.

Sustituyendo la Ec. 2-2 y 2-3 en la Ec. 2-1, con presión y temperatura como variables de estado, la ecuación resultante es:

$$\frac{d}{dt}p(t) = \frac{kR}{V} \cdot [\dot{m}_{in}(t) \cdot T_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t) \cdot T(t)] \quad (2-4)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{T \cdot R}{p(t) \cdot V \cdot c_v} [c_p \cdot \dot{m}_{in}(t) \cdot T_{in}(t) - c_p \cdot \dot{m}_{out}(t) \cdot T(t) - c_v \cdot (\dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t)) \cdot T(t)]$$

Asumiendo además que,  $T_{out}(t) = T(t)$  por análisis de parámetros concentrados y adicionalmente que  $T_{in}(t) = T(t)$  porque se asume que el tiempo de residencia del gas dentro del depósito es lo suficientemente largo, la Ec. 2-4 queda simplificada a:

$$\frac{d}{dt}p(t) = \frac{kT(t)}{V} \cdot [\dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}] \quad (2-5)$$

$$T(t) = T_{in}(t)$$

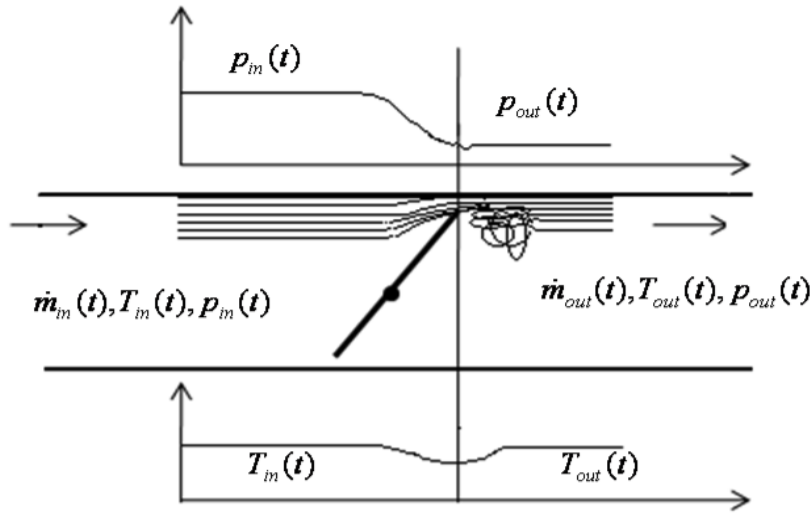
### 2.2.2. Flujo másico en una válvula

El flujo másico entre dos depósitos como lo son el medio ambiente y el múltiple de admisión en un MCI esta mediado por una válvula denominada “válvula de mariposa”, cuyas entradas son la presión aguas arriba  $p_{out}(t)$  y la presión aguas abajo  $p_{in}(t)$ , como se muestra en la Fig. 2-2. Para determinar la dinámica no lineal del flujo que pasa por la garganta, inicialmente, se establece la función por tramos  $\Psi(p_{in}(t)/p_{out}(t))$  definida en la Ec. 2-6.

Esta función establece su valor según dos criterios, los cuales usan como parámetro la relación de comparación entre la presión crítica  $p_{cr}$  y la presión aguas arriba  $p_{out}(t)$ . La  $p_{cr}$  es aquella donde el flujo alcanza la condición sónica en la parte de la garganta o área mínima y, se encuentra definida por la relación entre la presión aguas abajo  $p_{in}(t)$  y el coeficiente de dilatación adiabática del fluido  $k$ , siendo para el caso del aire  $k = 1,4$ .

$$\Psi \left( p_{in}(t) / p_{out}(t) \right) = \begin{cases} \sqrt{\cdot \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} & \text{para } p_{out} < p_{cr} \\ \left[ \frac{p_{out}}{p_{in}} \right]^{1/k} \cdot \sqrt{\frac{2 * k}{k-1} \cdot \left[ 1 - \frac{p_{out}}{p_{in}} \right]^{\frac{k-1}{k}}} & \text{para } p_{out} \geq p_{cr} \end{cases} \quad (2-6)$$

$$\text{con } p_{cr} = \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \cdot p_{in}$$



**Figura 2-2:** Modelo del flujo entre dos depósitos conectados por una válvula

Asumiendo adicionalmente que:

- No hay fricción entre el flujo y las paredes.
- No hay efectos inerciales en el flujo
- No hay entrada de masa o energía al sistema.
- Se considera el análisis cero dimensional para el flujo

Se aplica la ley de Bernoulli en fluidos compresibles y las relaciones termodinámicas para la expansión isentrópica para hallar la dinámica del flujo. Esto se muestra en la Ec. 2-7.

$$\dot{m}(t) = c_d \cdot A(t) \cdot \frac{p_{in}(t)}{\sqrt{R \cdot T_{in}(t)}} \cdot \Psi \left( \frac{p_{in}(t)}{p_{out}(t)} \right) \quad (2-7)$$

Donde,  $c_d$  es el coeficiente de descarga,  $A(t)$  una función que depende del área de la mariposa y es la función por tramos definida anteriormente.

### 2.2.3. Flujos de masa en un MCI

Un MCI puede ser aproximado a una bomba o dispositivo, en el cual, el flujo volumétrico es aproximadamente proporcional a su velocidad y la producción de torque dependerá de su eficiencia volumétrica. Una formulación típica para el flujo de masa de aire aspirado se muestra en la Ec. 2-8.

$$\dot{m}(t) = \rho_{in} \cdot V(t) = \rho_{in}(t) \cdot \eta_{vol}(p_m, \omega_m) \cdot \frac{V_d}{N} \cdot \frac{\omega_m(t)}{2\pi} \quad (2-8)$$

Donde,  $\rho_{in}(t)$  es la densidad del gas en el múltiple de admisión;  $\eta_{vol}(p_m, \omega_m)$ , la eficiencia volumétrica, hallada en forma experimental (ver sección 2.3.1);  $V_d$  el volumen desplazado por ciclo;  $\omega_m(t)$ , la velocidad rotacional del motor y,  $N$  el número de revoluciones por ciclo ( $N = 2$ , para un motor de 4 tiempos, siendo éste el caso aquí trabajado).

### 2.2.4. Velocidad en un MCI

En un modelo de valor medio el comportamiento de la velocidad rotacional se puede definir en función del torque producido por el fenómeno de la combustión menos el torque adicionado como carga y la inercia del motor. Dentro de las simplificaciones del modelo se asume la inercia constante y adicionalmente todos los fenómenos de fricción se incluyen inherentemente en el cálculo del torque.

En el modelo mecánico el único reservorio de energía se concentra en el sistema mecánico de la salida (eje), en el cual se almacena energía cinética. Por tanto, el comportamiento matemático de la variable de estado velocidad rotacional del motor se expresa en la Ec. 2-9.

$$I \cdot \frac{d}{dt} \omega_m(t) = T_e(t) - T_l(t) \quad (2-9)$$

Donde,  $I$  es la inercia del motor la cual se asume conocida,  $\omega_m$  es la velocidad rotacional del motor,  $T_e$  es el torque producido por la máquina producto de la combustión y  $T_l$  es el torque de la carga. La modelación realizada en este trabajo asume una carga de cero ( $T_l = 0$ ), por tanto, el modelo está descrito para el motor en vacío.

## 2.3. MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL MCI

El modelo matemático del MCI de ignición por chispa está compuesto por 3 submodelos que se aprecian en la Fig. 2-3.

1. Modelo de la dinámica del aire
2. Modelo mecánico
3. Modelo de Combustión

Los cuales surgen de aplicar la ecuación de expansión adiabática del aire en la garganta de la mariposa y ley de gases ideales con balance de masas para el modelo del aire (Hendrick, 1997; Guzzella, 2004). Un modelo teórico (Aquino, 1981) se aplica a la dinámica de combustión y para explicar el modelo mecánico se aplica conservación del momento angular en el eje de salida.

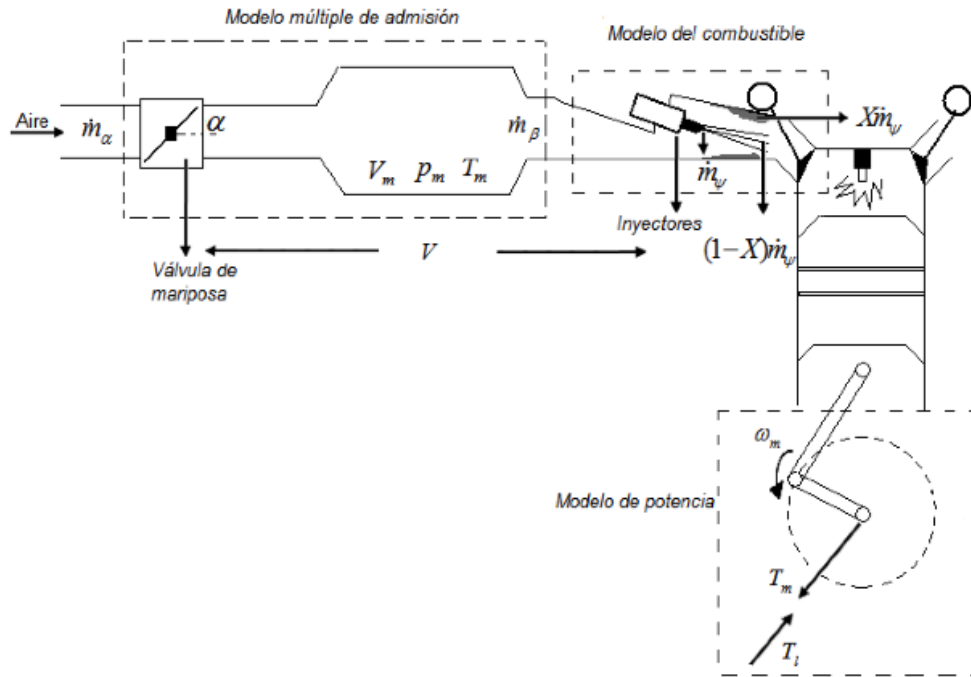
La ecuación diferencial para la presión en el múltiple de admisión de aire se muestra en la Ec. 2-10, donde la presión  $P_m$  es la primera variable de estado considerada en este modelo.

$$\frac{d}{dt} P_m(t) \cdot \left( \frac{V_m}{RT_m} \right) = \dot{m}_\alpha(t) - \dot{m}_\beta(t) \quad (2-10)$$

Donde,  $\dot{m}_\alpha$  es el flujo másico del aire entrante al múltiple de admisión por medio de la válvula mariposa,  $\dot{m}_\beta$  es el flujo másico del aire entrando al cilindro,  $V_m$  y  $T_m$  son el volumen y la temperatura en el múltiple, los cuales se determinan según la cilindrada del motor,  $R$ , es la constante de los gases, siendo el gas aire. De otro lado,  $\dot{m}_\alpha$  se encuentra mediante la expansión adiabática del aire, en la Ec. 2-11 se muestran los términos que la componen (Guzella, 2004)

$$\dot{m}_\alpha(t) = \begin{cases} A_\alpha(t) \cdot \frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \frac{p_m(t)}{P_{atm}} < 0,5 \quad \text{Flujo Sónico} \\ A_\alpha(t) \cdot \frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}} \cdot \sqrt{2 \cdot \left[ \frac{P_m(t)}{P_{atm}} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{P_m(t)}{P_{atm}} \right]} & \text{Flujo Subsónico} \end{cases} \quad (2-11)$$

Donde,  $A_\alpha(t)$  es una función variable en el tiempo alimentada con el ángulo  $\alpha$  de la apertura de la válvula mariposa, la relación se muestra en la Ec. 2-12.



**Figura 2-3:** Estructura del modelo de valor promedio (MVEM) del MCI.

$$A_\alpha(t) = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \right) + A_0 \quad (2-12)$$

$$\alpha = \mu_\alpha$$

Donde,  $\alpha_0$  y  $A_0$  son estimaciones del ángulo mínimo y área mínima respectivamente, las cuales no se pueden medir y garantizan condiciones de ralenti o de mínimas sección de paso de aire;  $\mu_\alpha$  es la entrada de control (ángulo) correspondiente al pedal de aceleración.

De otro lado, para determinar  $\dot{m}_\beta(t)$  utilizamos la ecuación que balancea la mezcla aire/combustible determinada por la Ec. 2-13

$$\dot{m}_\beta(t) = \frac{\dot{m}_m(t)}{1 + \frac{1}{\lambda L}} \quad (2-13)$$

Donde,  $L$  es la relación aire-combustible estequiométrico (aproximadamente 1.4 para la gasolina) y el valor representado de oxígeno remanente de la combustión normalizado;  $\dot{m}_m(t)$  es el flujo másico de la mezcla aire-combustible, el cual se determina mediante la ecuación de densidad-velocidad mostrada en la Ec. 2-14.

$$\dot{m}_m(t) = \frac{V_d}{4\pi \cdot R \cdot T_m} \cdot \eta_v(\omega_m(t), P_m(t)) \cdot \omega_m(t) \cdot P_m(t) \quad (2-14)$$

$$\lambda = \frac{\dot{m}_\alpha}{\dot{m}_\phi \cdot L}$$

Donde;  $V_d$ , es el volumen desplazado por ciclo;  $R$ , constante particular del aire;  $T_m$ , temperatura en el múltiple de admisión;  $\eta_v(\omega_m(t), P_m(t))$  es una función a estimar que representa la eficiencia volumétrica del motor. Para el cálculo de  $\lambda$ , se define el flujo másico de aire en la entrada  $\dot{m}_\alpha$  y el flujo másico del combustible  $\dot{m}_\phi$ .

Finalmente, utilizando la Ec. 2-11, 2-12, 2-13 y 2-14 en la Ec. 2-10, la presión asignada como un estado en el modelo matemático queda como se muestra Ec. 2-15.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} P_m(t) = & \left( \frac{RT_m}{V_m} \right) \cdot \left( \frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left( \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \right) + A_0 \right) \\ & - \frac{V_d}{4\pi \cdot V_m} \cdot \frac{\eta_v(\omega_m(t), P_m(t)) \cdot \omega_m(t) \cdot P_m(t)}{1 + \frac{\dot{m}_\phi}{\dot{m}_\alpha}} \end{aligned} \right\} \text{ Si } \frac{P_m(t)}{P_{atm}} < 0,5 \text{ Flujo sónico} \quad (2-15)$$

Ó

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} P_m(t) = & \left( \frac{RT_m}{V_m} \right) \cdot \left( \frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}} \right) \sqrt{2 \cdot \left[ \frac{P_m(t)}{P_{atm}} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{P_m(t)}{P_{atm}} \right]} \cdot \left( \frac{\pi d^2}{4} \cdot \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \right) + A_0 \right) \\ & - \frac{V_d}{4\pi \cdot V_m} \cdot \frac{\eta_v(\omega_m(t), P_m(t)) \cdot \omega_m(t) \cdot P_m(t)}{1 + \frac{\dot{m}_\phi}{\dot{m}_\alpha}} \end{aligned} \right\} \text{ Flujo Subsónico}$$

El modelo mecánico definido en la Ec. 2-16 define la segunda variable de estado: la velocidad rotacional del motor de combustión  $\omega_m(t)$ . Se asume que la inercia del motor es constante y que los fenómenos de fricción se desprecian. Por tanto, el cambio en la energía cinética del cigüeñal es igual a la diferencia entre el torque del motor y el de la carga, el cual se asume conocido.

$$\frac{d}{dt} \omega_m(t) = \frac{\tau_c(t)}{I_e} - \frac{\tau_l(t)}{I_e} \quad (2-16)$$

Donde,  $\tau_l$  es la carga del motor y  $\tau_c$  es el torque generado por la energía de la combustión y se define como muestra la Ec. 2-17.

$$\tau_c(t) = \frac{H_\mu \cdot \eta_t(t - \tau_d) \cdot \dot{m}_\phi}{I_e} \quad (2-17)$$

Donde;  $H_\mu$ , es el poder calorífico del combustible;  $\eta_t(t - \tau_d)$  es la eficiencia térmica del motor y es en sentido estricto una función  $\eta_t(\omega_m(t))$  dependiente de la velocidad del eje de salida la cual se encuentra retrasada con respecto a la respuesta de salida un tiempo  $\tau_d$ . La eficiencia térmica es un parámetro a estimar y su obtención se describe en la sección 2.3.1.

El modelo de combustión en el cilindro se rige por variables instantáneas, las cuales alcanzan el equilibrio en unos pocos ciclos del motor. Se realiza un balance de masas con los flujos que reaccionan al interior del cilindro para dar lugar a la potencia desarrollada.

En la Ec. 2-18 se muestra el sistema planteado (Aquino, 1981) para la dinámica del combustible dentro del cilindro.

$$\begin{aligned}\dot{m}_\phi &= \dot{m}_{fv} + \dot{m}_{fl} \\ \dot{m}_{fv} &= (1 - X)\dot{m}_\Psi \\ \frac{d}{dt}\dot{m}_{fl} &= (1/\tau_{fl})(-\dot{m}_{fl} + X\dot{m}_\Psi)\end{aligned}\tag{2-18}$$

Donde,  $\dot{m}_\phi$  es el flujo másico del combustible que ha reaccionado en el cilindro para producir un trabajo;  $\dot{m}_{fv}$  es la porción de combustible inyectado que se evapora inmediatamente y  $\dot{m}_{fl}$  es la porción de lo inyectado que ha quedado líquida, la cual se evapora con un tiempo de retardo  $\tau_{fl}$ ,  $\dot{m}_\Psi$  es el combustible inyectado. El tiempo  $\tau_{fl}$  se asume de una estimación en un caso similar de MCI (Melgaard et al., 1990).

El modelo compactado en ecuaciones diferenciales con  $\omega_m(t)$ ,  $P_m(t)$  como variables de tiempo continuo adquieren el equilibrio entre 10-1000 ciclos del motor. El sistema descrito en la parte superior de la Ec. 2-19. aplica cuando el ángulo descrito por la mariposa es pequeño, en esta condición se da el flujo sónico y la velocidad del flujo alcanzan la del sonido. El sistema descrito en la parte inferior aplica en condiciones de apertura habitual de la mariposa donde el flujo másico del aire depende de la presión en el múltiple .

$$\left. \begin{aligned}\frac{d}{dt}P_m(t) &= \left(\frac{RT_m}{V_m}\right) \cdot \left(\frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\pi d^2}{4} \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0}\right) + A_0\right) \\ &\quad - \frac{V_d}{4\pi V_m} \cdot \frac{\eta_v(\omega_m(t), P_m(t)) \cdot \omega_m(t) \cdot P_m(t)}{1 + \frac{\dot{m}_\phi}{\dot{m}_\alpha}} \\ \frac{d}{dt}\omega_m(t) &= \frac{H_\mu \cdot \eta_t(\omega_m(t))(t - \tau_d) \cdot \dot{m}_\phi}{I_e} - \frac{\tau_l(t)}{I_e}\end{aligned}\right\} \text{ Si } \frac{P_m(t)}{P} < 0.5 \text{ Flujo sónico}$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{d}{dt}P_m(t) &= \left(\frac{RT_m}{V_m}\right) \cdot \left(\frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}}\right) \sqrt{2 \cdot \left[\frac{P_m(t)}{P_{atm}}\right] \cdot \left[1 - \frac{P_m(t)}{P_{atm}}\right]} \cdot \left(\frac{\pi d^2}{4} \cdot \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0}\right) + A_0\right) \\ &\quad - \frac{V_d}{4\pi \cdot V_m} \cdot \frac{\eta_v(\omega_m(t), P_m(t)) \cdot \omega_m(t) \cdot P_m(t)}{1 + \frac{\dot{m}_\phi}{\dot{m}_\alpha}} \\ \frac{d}{dt}\omega_m(t) &= \frac{H_\mu \cdot \eta_t(\omega_m(t))(t - \tau_d) \cdot \dot{m}_\phi}{I_e} - \frac{\tau_l(t)}{I_e}\end{aligned}\right\} \text{ Flujo Subsónico} \tag{2-19}$$



El modelo de combustible (Aquino, 1981) expresado en espacio de estados se muestra en la Ec. 2-20.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\dot{m}_{fv}}{dt} \\ \frac{d\dot{m}_{fl}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_{fv} & 0 \\ 0 & -1/\tau_{fl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_{fv} \\ \dot{m}_{fl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-X)/\tau_{fv} \\ X/\tau_{fl} \end{bmatrix} \dot{m}_{\psi} \quad (2-20)$$

### 2.3.1. Estimación de los parámetros: eficiencia volumétrica y eficiencia térmica.

*Eficiencia volumétrica.* La eficiencia volumétrica es un parámetro particular de cada motor porque depende de la geometría y capacidad de cada máquina, por tanto se debe hallar experimentalmente. Desde el punto de vista de la modelación un motor puede aproximarse a un sistema de aire como es una bomba volumétrica. Así, por una parte la eficiencia volumétrica entregada, se encuentra influenciada por la presión y la velocidad y su valor entregado es proporcional a la velocidad de la máquina (Guzzella, 2004). La eficiencia volumétrica se define en la Ec. 2-21 como una función de la velocidad angular de la máquina y la presión en el múltiple.

$$\eta_v(P_m, \omega_m) = \eta_{vP}(P_m) * \eta_{v\omega}(\omega_m) \quad (2-21)$$

Donde, la parte de la eficiencia volumétrica que depende de la presión se define en la Ec. 2-22 siendo  $V_c$  el volumen de compresión,  $V_d$ , el volumen desplazado por el cilindro,  $P_e$  la presión en el exhosto y  $k$ , la constante de expansión adiabática del aire.

$$\eta_{vP}(P_m) = \frac{V_c + V_d}{V_d} - \frac{V_c}{V_d} * \left( \frac{P_e}{P_m} \right)^{1/k} \quad (2-22)$$

Adicionalmente, la parte influenciada por la velocidad angular del motor se define en la Ec. 2-23.

$$\eta_{vP}(\omega_m) = \gamma_0 + \gamma_1 * \omega_m + \gamma_2 * \omega_m^2 \quad (2-23)$$

Por otro lado, de la Ec. 2-14 se observa que la eficiencia volumétrica es proporcional al flujo másico  $\dot{m}_{\beta}$ , el cual en condiciones de estado estacionarias sería  $\dot{m}_{\beta} = \dot{m}_{\alpha}$ .

Así, definiendo un subíndice  $i$  como contador para indicar la  $i$ -ésima medición, se puede establecer la Ec. 2-24 para encontrar una eficiencia volumétrica experimental, siendo  $\dot{m}_\alpha$  el flujo medido por el sensor MAF (mass airflow).

$$\eta_{v\_exp}(\omega_{m,i}, P_{m,i}, \dot{m}_{\alpha,i}) = \frac{RV_m}{P_{m,i}} * \left( \frac{V_c + V_d}{V_d} - \frac{V_c}{V_d} \left( \frac{P_{atm}}{P_{m,i}} \right)^{1/k} \right)^{-1} * \dot{m}_{a,i} * \frac{1 + L}{L} * \frac{4\pi}{\omega_{m,i} * V_d} \quad (2-24)$$

Luego, se aplica mínimos cuadrados utilizando las matrices que se definen en Ec. 2-25.

$$\tilde{y}_\eta = \begin{bmatrix} \eta_{v\_exp,1} \\ \eta_{v\_exp,2} \\ \vdots \\ \eta_{v\_exp,N} \end{bmatrix} \in R^{Nx1}, M_\eta = 1 \begin{bmatrix} 1 & \omega_{m,1} & \omega_{m,1}^2 \\ 1 & \omega_{m,2} & \omega_{m,2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega_{m,N} & \omega_{m,N}^2 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

Y así la solución que minimiza el error de predicción es la que se muestra en la Ec. 2-26.

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} M_\eta^T * M_\eta \end{bmatrix}^{-1} * M_\eta^T * \tilde{y}_\eta \quad (2-26)$$

*Eficiencia térmica.* Es la capacidad que posee el motor para aprovechar todo el calor generado por la combustión con el fin de mover sus partes móviles y tener energía adicional para la fuerza de giro. La modelación propuesta asume el motor en vacío, por tanto, la eficiencia térmica o de conversión será calculada como aquella requerida para que el motor venza la inercia de todo el conjunto de partes móviles. La Ec. 2-27 es la utilizada para medir la eficiencia de conversión y se derivada de la teoría de máquinas de combustión.

$$\eta_t = I_e * \frac{d\omega_{m,i}}{dt} * \omega_{m,i} * \frac{2\pi/60}{\dot{m}_\psi * H_\mu} \quad (2-27)$$

### 2.3.2. Modelo dinámico en espacio de estados del MCI en tiempo continuo

El sistema dinámico que compacta los tres modelos ya mencionados es un MIMO (múltiples entradas-múltiples salidas) cuyas estados y entradas de control se definen en la Ec. 2-28.

$$\begin{aligned} x &= [P_m \quad \omega_m \quad \dot{m}_{fv} \quad \dot{m}_{fl}] \\ \mu &= [\alpha \quad \dot{m}_\psi] \end{aligned} \quad (2-28)$$

Se compacta la dinámica de tiempo continuo cuyas variables de estado son:  $P_m$  y  $\omega_m$  junto con la dinámica de comportamiento instantáneo del modelo de combustión, representadas por:  $\dot{m}_{fv}$  y  $\dot{m}_{fl}$  en un espacio de estados único con el fin de estimar los estados del modelo matemático MCI. Entonces, la relevancia de los diferentes marcos temporales arriba mencionado en el problema de estimación con técnicas bayesianas debe estudiarse. En la literatura ya mencionada no se ha estudiado este problema así planteado.

Para definir todo el espacio de estados en forma generalizada, sea  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  los estados y,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  las entradas de control, como se muestra en la Ec. 2-29.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= P_m \\
 x_2 &= \omega_m \\
 x_3 &= \dot{m}_{fv} \\
 x_4 &= \dot{m}_{fl} \\
 \mu_1 &= \alpha \\
 \mu_2 &= \dot{m}_{\psi}
 \end{aligned} \tag{2-29}$$

Sea  $\dot{x} = \frac{d}{dt}$  el operador derivada. Por tanto, el sistema se puede representar de manera general mediante dos funciones no lineales  $f$  y  $g$  como se muestra en Ec. 2-30.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = f(x, \theta, t) + g(x, \mu, \theta, t) \tag{2-30}$$

Donde,  $x \in \chi \subset \mathcal{R}^n$  es el vector de estados;  $\mu \in U \subset \mathcal{R}^m$  es el vector de entradas de control;  $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^p$  es un conjunto de parámetros a estimar experimentalmente, los cuales obedecen a los términos de eficiencia volumétrica y eficiencia térmica.

Por tanto, el modelo en el espacio de estados total sería como se muestra en la Ec. 2-31.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V_d}{4\pi V_m} \cdot \frac{\eta_v(x_1, x_2) \cdot x_1 \cdot x_2}{1 + \frac{x_3 + x_4}{\dot{m}_\alpha}} \\ \frac{H_\mu \cdot \eta_t(x_2) \cdot (x_3 + x_4)}{I_e} - \frac{\tau_l}{I_e} \\ -\frac{1}{\tau_{fv}} \cdot x_3 \\ -\frac{1}{\tau_{fl}} \cdot x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{RT_m}{V_m} \cdot \frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mu_1 \\ 0 \\ \frac{1-X}{\tau_{fv}} \cdot \mu_2 \\ \frac{X}{\tau_{fl}} \cdot \mu_2 \end{bmatrix} \quad \text{si } \frac{x_1}{P_{atm}} < 0,5 \text{ Flujo Sónico} \quad (2-31)$$

O en otro caso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V_d}{4\pi V_m} \cdot \frac{\eta_v(x_1, x_2) \cdot x_1 \cdot x_2}{1 + \frac{x_3 + x_4}{\dot{m}_\alpha}} \\ \frac{H_\mu \cdot \eta_t(x_2) \cdot (x_3 + x_4)}{I_e} - \frac{\tau_l}{I_e} \\ -\frac{1}{\tau_{fv}} \cdot x_3 \\ -\frac{1}{\tau_{fl}} \cdot x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{RT_m}{V_m} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{x_1}{P_{atm}} \left[1 - \frac{x_1}{P_{atm}}\right]} \cdot \mu_1 \\ 0 \\ \frac{1-X}{\tau_{fv}} \cdot \mu_2 \\ \frac{X}{\tau_{ff}} \cdot \mu_2 \end{bmatrix} \quad \text{Flujo Subsónico}$$

### 2.3.3. Modelo dinámico estocástico del MCI en tiempo discreto

Debido a que la solución al problema de estimación de los estados es recursiva y secuencial, es conveniente discretizar el sistema dinámico del MCI. Para ello, se aplica el método de Euler dado por la Ec. 2-32 al sistema dinámico representado por la Ec. 2-31.

$$x_{k+1} = x_k + kf(x(t), t) \quad (2-32)$$

El sistema discretizado se muestra en la Ec. 2-33.

$$\begin{aligned}
 x_{1(k+1)} &= x_{1(k)} - Ak + BCk \\
 x_{2(k+1)} &= x_{2(k)} + Dk \\
 x_{3(k+1)} &= x_k - \frac{1}{\tau_{fv}} x_{3(k)} k + \frac{1-X}{\tau_{fv}} \mu_{2(k)} k \\
 x_{4(k+1)} &= x_{4(k)} + \frac{1}{\tau_{fl}} x_{4(k)} k + \frac{X}{\tau_{fl}} \mu_{2(k)} k \quad \text{Si } \frac{x_{1(k)}}{P_{atm}} < 0,5
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{V_d}{4\pi V_m} \frac{\eta_v(x_{1(k)}, x_{2(k)}) x_{1(k)} x_{2(k)}}{1 + \frac{x_{3(k)} + x_{4(k)}}{\dot{m}_\alpha}} \\
 B &= \frac{RT_m}{V_m} \frac{P_{atm}}{\sqrt{RT_{amb}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 C &= \frac{\pi d^2}{4} \left( 1 - \frac{\cos \mu_{1(k)}}{\cos \alpha_0} \right) + A_0 \\
 D &= \frac{H_\mu \eta_t(x_{2(k)})}{I_e} (x_{3(k)} + x_{4(k)}) - \frac{\tau_l}{I_e}
 \end{aligned}$$

O en otro caso (caso subsónico):

$$\begin{aligned}
 x_{1(k+1)} &= x_{1(k)} - Ak + BCEk \\
 x_{2(k+1)} &= x_{2(k)} + Dk \\
 x_{3(k+1)} &= x_{3(k)} - \frac{1}{\tau_{fv}} x_{2(k)} k + \frac{1-X}{\tau_{fv}} \mu_{2(k)} k \\
 x_{4(k+1)} &= x_{4(k)} - \frac{1}{\tau_{fl}} x_{4(k)} k + \frac{X}{\tau_{fl}} \mu_{2(k)} k
 \end{aligned}$$

donde,

$$E = \sqrt{\frac{2 * x_{1(k)}}{P_{atm}} \left[ 1 - \frac{x_{1(k)}}{P_{atm}} \right]}$$

Teniendo en cuenta, que el modelo discreto pretende emular un comportamiento realista del MCI, se adiciona una componente estocástica al sistema de la Ec. 2-33, las cuales reproducen las incertidumbres en las observaciones y en el modelo de evolución de los estados. Por tanto, el sistema dinámico estocástico discreto incluyendo la ecuación de observación con secuencia de mediciones discretas y sus incertidumbres asociados queda sintetizado en la Ec. 2-34.

$$\begin{aligned} x_k &= f_k(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \\ y_k &= h_k(x_k) + v_k \end{aligned} \tag{2-34}$$

Donde,  $x_k$  es un  $n$ -vector denominado: evolución de la secuencia de estado con  $k \in N$ ,  $f_k(\cdot) : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$  es una vector-función no lineal, denominada función de transición del estado,  $u_k$  es una secuencia determinística correspondiente a la entrada(s) de control del sistema y,  $w_k$  es una secuencia de ruido blanco, de media cero, con dimensiones apropiadas, independiente e idénticamente distribuido y se asume conocida.  $h_k(\cdot) : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  es la función de observaciones y  $v_k$  es una secuencia de ruido blanco, de media cero, con dimensiones apropiadas, independiente e idénticamente distribuido y se asume conocida.

# Capítulo 3

## Filtrado bayesiano

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Se describe matemáticamente el problema de extraer o filtrar información a un sistema dinámico estocástico expresado en el espacio de estados desde la perspectiva bayesiana, la cual involucra el concepto de densidad conjunta entre variables aleatorias (vectores de estado). Adicionalmente, se definen los preliminares matemáticos para que el problema de filtrado quede bien definido y posea solución en el marco bayesiano. Finalmente se explica la metodología para desarrollar el filtro de partículas y la técnica de implementación con el pseudocódigo asociado.

### 3.2. PROBLEMA DE FILTRADO ESTOCÁSTICO

El problema de filtrado estocástico se define como la extracción iterada de información acerca de una(s) variable(s) de interés en el tiempo  $t$  por medio de datos medidos hasta, e incluido el tiempo  $t$  sobre el sistema. Este, deberá modelarse matemáticamente y estar bajo ciertas condiciones para poder ser objeto de estimación o filtrado. En particular, para este trabajo las condiciones del sistema son: un sistema dinámico no lineal definido en un espacio de estados finito-dimensional, con un proceso estocástico o incertidumbres asociadas de tipo ruido blanco gaussiano.

La solución de filtrado para este sistema dinámico estocástico se enfrenta desde la perspectiva bayesiana, la cual inicialmente parte del proceso estocástico  $x_t$  que es el vector de estados del sistema, y lo indexa como una familia de variables aleatorias bajo el conjunto de parámetro  $T$ , siendo  $T = 1, 2, \dots, n$ .

De esta manera, el sistema dinámico estocástico  $\{x_t, t \in T\}$  es función de dos variables: el parámetro del tiempo  $t$  y el parámetro de la probabilidad  $\omega$ , es decir,  $\{x_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ , siendo  $\Omega$  el espacio de probabilidad. Así, por cada  $t$ ,  $x_t(\cdot)$  es una variable aleatoria (vector); por cada  $\omega$ ,  $x_{(\cdot)}(\omega)$  es una realización del proceso estocástico. El conjunto de parámetro  $T$  puede ser continuo o discreto. En el caso aquí tratado se usará el enfoque discreto para la aplicación, dado que es un sistema dinámico muestreado a la velocidad de los instrumentos disponibles (Yuz, 2005).

Una vez dotado el sistema dinámico con condiciones de proceso estocástico, tiene una *ley de probabilidad* asociada (Jazwinski, 2007), la cual establece que el proceso estocástico queda completamente caracterizado o estadísticamente determinado ya sea mediante su función de distribución conjunta  $F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$  o función de densidad conjunta  $p(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$  de las variables aleatorias (vectores)  $x_{t_1}, \dots, x_{t_n}$  con  $\{t_i\} \in T$ . Particularmente, las densidades de primer y segundo orden especifican la ley de probabilidad del proceso estocástico, estas son:  $p(x_t)$  y  $p(x_t, x_\tau)$  respectivamente, con  $t, \tau \in T$ . Las densidades de primer y segundo orden del sistema dinámico estocástico establecen el punto de partida de la solución al problema de filtrado no lineal, permitiendo relacionar dos variables aleatorias mediante la densidad conjunta  $p(x_t, x_\tau) = p(x, y, t, \tau)$  con  $p(x_t, x_\tau)$  función de  $t$  y  $\tau$  y a partir de esta producir la función *densidad condicional* que se muestra en la Ec. 3-1, siendo  $p(x_\tau)$  la marginal.

$$p(x_t|x_\tau) = \frac{p(x_t, x_\tau)}{p(x_\tau)} \quad (3-1)$$

El punto de vista bayesiano al problema de filtrado parte del concepto de función de densidad condicional entre dos variables aleatorias: el vector de estados y las observaciones de un sistema dinámico estocástico; mediante el uso recursivo de la PDF previa del estado y la PDF posterior del estado; la primera se reconstruye a partir del modelo probabilístico de la evolución del estado, particularmente, hace uso de las ecuaciones del sistema dinámico estocástico y la PDF posterior actualiza la previa vía la regla de Bayes incluyendo el modelo observacional o las observaciones si se disponen, con la cual se reconstruye la densidad condicional de las mediciones dados los estados. En palabras generales, el problema de filtrado no lineal desde la perspectiva bayesiana presenta una solución fundada en la estructura probabilística del sistema dinámico estocástico que evoluciona en el tiempo, cuya ley de probabilidad se determina mediante las observaciones relacionadas con el proceso estocástico.



Ahora bien, para la solución de la estimación en forma recursiva, el algoritmo de filtrado no lineal utiliza la fundamentación teórica de la ecuación diferencial estocástica de Itô para generar un equivalente computacional del sistema dinámico con incertidumbre real (motor de combustión) (Jazwinski, 2007). La solución de la ecuación remite a la integral estocástica de Itô desarrollada en forma computacional bajo ciertos supuestos, entre ellos que el sistema dinámico estocástico sea un proceso de Markov, con lo cual se garantiza la predicción del filtro y su aplicación discreta (computacional).

La convergencia de la solución al problema de estimación del filtro se soporta en el sentido de media cuadrática (ver anexos), es decir, se utiliza el primer momento o la media condicional de la secuencia de estimación de los estados que evolucionan computacionalmente a través de sus funciones de densidad (PDF), esta es una solución aproximada subóptima debido a que no existe un conjunto de parámetros que caractericen la PDF de sistemas no lineales, como es el caso del modelo aquí propuesto, sino que la PDF de los estados se reconstruye secuencialmente. Por tanto, la solución es una estimación de varianza mínima y bayesiana en el sentido de que maximiza la densidad a posteriori (PDF posterior) de los estados vía la regla de Bayes partiendo de una densidad conocida de los estados (a priori):  $p(x_0)$ . Esta solución se conoce como estimación del máximo a posteriori (MAP).

La reconstrucción de la PDF posterior utiliza muestreo Monte Carlo secuencial, el cual usa un número adecuado de variables aleatorias independientes muestreadas directamente de los estados para representar la PDF posterior y actualizarla incorporando nuevas observaciones. Esta técnica se denomina muestreo de importancia secuencial, en inglés: “sequential importance sampling” (SIS). Este es el mecanismo de propagación del filtro de partículas o “bootstrap” que es el que se aplicará en este trabajo.

### 3.3. SISTEMA DINÁMICO ESTOCÁSTICO

Un sistema dinámico continuo como el MCI, con un espacio de estados finito-dimensional, el cual está sometido a perturbaciones aleatorias; puede ser representado mediante una ecuación diferencial estocástica o un sistema dinámico estocástico continuo como el que se muestra en la Ec. 3-2.

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, w_t, t), t \geq t_0 \quad (3-2)$$

Donde,  $x_t$  y  $w_t$  son respectivamente, el n-vector de estado y el m-vector de perturbaciones aleatorias en el tiempo  $t$ ,  $f$  es una función real n-vector, no lineal. La condición inicial para Ec. 3-2 es una variable aleatoria  $x_{t_0}$  con una distribución conocida y el proceso  $\{w_t, t \geq t_0\}$  se asume con estadística conocida.

Por el teorema fundamental del cálculo en media cuadrática, la derivada en la Ec. 3-2 puede ser evaluada mediante integración en Riemann sobre un intervalo de tiempo  $[t_0, t]$  como se muestra en la Ec. 3-3. Adicionalmente, ambas ecuaciones se consideran equivalentes (Jazwinski, 2007).

$$x_t - x_{t_0} = \int_{t_0}^t f(x_\tau, w_\tau, \tau) d\tau \quad (3-3)$$

Ahora bien, cuando la incertidumbre asociada al sistema de la Ec. 3-2 es un ruido blanco gaussiano, la componente asociada puede ser expresada como se muestra a continuación:

$$dx_t = f(x_t, t)dt + Q(x_t, t)d\beta_t, \quad t \geq t_0 \quad (3-4)$$

Este, es la representación de un sistema dinámico estocástico continuo, denominado “ecuación diferencial estocástica de Itô”, donde,  $Q$  es una función matriz  $n \times m$  con condición inicial  $x_{t_0}$  independiente del ruido y  $w_t d\beta_t/dt$ , con  $\beta_t$  un movimiento browniano. La Ec. 3-4 tiene sentido y posible solución en media cuadrática mediante la Ec. 3-5.

$$x_t - x_{t_0} = \int_{t_0}^t f(x_\tau, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t Q(x_\tau, \tau) d\beta_\tau, \quad t \geq t_0 \quad (3-5)$$

Esta última se conoce como la “integral estocástica Itô” y puede dar solución a un problema de estimación de estados, donde  $x$  es el estado. Para este fin, se asumen pequeños incrementos  $\delta$  para  $t$ , con lo cual la Ec. 3-4 se convierte en:

$$x_{t+\delta t} - x_t = f(x_t, t)\delta t + Q(x_t, t)(\beta_{t+\delta t} - \beta_t) \quad (3-6)$$

Donde se asume lo siguiente con el propósito de solución computacional en media cuadrática:

- $x_t, x_{t+\delta t}$  dependen solamente de los incrementos del movimiento Browniano:  $\beta_{t+\delta t} - \beta_t$ .
- Los incrementos del movimiento browniano son independientes y, se asume que  $\{\beta_t, t \geq t_0\}$  es independiente de  $x_{t_0}$ .

Por lo anterior, con  $x_t$  dado,  $x_{t+\delta t}$  es independiente de  $\{x_\tau, \tau \leq t\}$ . Por lo tanto, el proceso  $\{x_t, t \geq t_0\}$  generado por la Ec. 3-4 (si existe) es un proceso de Markov (ver anexos).

La propiedad de Markov para el proceso  $x_t$  de nuestro sistema dinámico estocástico da solución al problema de estimación del estado, porque permite derivar la ley de evolución de  $x_t$  (estado) en términos de su función de densidad dadas las observaciones del sistema  $p(x_t|Y_t)$  y una condición inicial de densidad conocida  $p(x_{t_0})$ . La densidad que evoluciona en cada incremento de tiempo se conoce como: “*densidad de la probabilidad de transición del estado*”, la cual se satisface mediante la ecuación de Fokker-Planck o Ecuación de Kolmogorov hacia adelante, ver su deducción y aspectos relacionados en (Quintero, 2009; Jazwinski, 2007; Chen, 2003).

Las propiedades de la solución del sistema dinámico estocástico dado por la Ec. 3-5 en el sentido de media cuadrática se exponen en el siguiente teorema (Jazwinski, 2007):

Suponga la función real  $f$  y  $q$ , y una condición inicial  $x_{t_0}$  que satisfacen las siguientes hipótesis:

H1. Hay un  $K \geq 0$  tal que:

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2}, \\ |q(x, t)| &\leq K(1 + |x|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

H2.  $f$  y  $q$  satisfacen la condición de Lipschitz en  $x$ :

$$\begin{aligned} |f(x_2, t) - f(x_1, t)| &\leq K|x_2 - x_1|, \\ |q(x_2, t) - q(x_1, t)| &\leq K|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

H2.  $f$  y  $q$  satisfacen la condición de Lipschitz en  $t$  sobre  $[t_0, T]$ :

$$\begin{aligned} |f(x_2, t) - f(x_1, t)| &\leq K|t_2 - t_1|, \\ |q(x_2, t) - q(x_1, t)| &\leq K|t_2 - t_1| \end{aligned}$$

H4.  $x_{t_0}$  es alguna variable aleatoria con  $E\{|x_{t_0}|^2\} < \infty$ , independiente de  $\{d\beta_t, t \in [t_0, T]\}$ . Entonces, la Ec. 3-5 tiene una solución en  $[t_0, T]$  en el sentido de media cuadrática. La solución al proceso  $\{x_t\}$  posee las siguientes propiedades:

- P1.  $x_t$  es continua en media cuadrática en  $[t_0, T]$   
 P2.  $E \{|x_{t_0}|^2\} < \infty$ , para todo  $t \in [t_0, T]$   
 P2'.  $E \{|x_{t_0}|^2\} < M$   
 P3.  $\int_{t_0}^T E \{|x_{t_0}|^2\} dt < \infty$   
 P4.  $x_t + x_{t_0}$  es independiente de  $\{d\beta_\tau, \tau \geq t\}$  para cada  $t \in [t_0, T]$

### 3.4. ESTIMACIÓN BAYESIANA RECURSIVA

La estadística bayesiana es una teoría que interpreta la probabilidad como una medida condicional de las incertidumbres. Los estados de un sistema dinámico estocástico y los parámetros desconocidos sujetos a variaciones en el tiempo, son tomados en la inferencia bayesiana como incertidumbres. El objetivo de la inferencia bayesiana es “usar conocimiento previo y causal para inferir la probabilidad condicional a partir de observaciones finitas” (Chen, 2003).

La estimación bayesiana recursiva parte de dos supuestos:

- (i) Se asume que los estados siguen un proceso de Markov de primer orden (ver anexo), es decir,  $p(x_k|x_{0:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$ .
- (ii) Las observaciones (mediciones)  $y_{1:k}$  son independientes de los estados.

Sean las observaciones disponibles en el tiempo  $k$  de la siguiente forma:  $D_k = \{y_i : i = 1, \dots, k\}$  y sea  $p(x_k|D_k)$  la PDF condicional del estado  $x_k$ . De la regla de Bayes mostrada en la Ec. 3-7, la densidad posterior está descrita mediante tres términos:

$$p(x_k|D_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|D_{k-1})}{p(y_k|D_{k-1})} \quad (3-7)$$

- La previa:  $p(x_k|D_{k-1})$ , define el conocimiento del modelo.
- La “likelihood”:  $p(y_k|x_k)$ , determinada por el modelo del ruido de la medición o modelo observacional.
- La evidencia:  $p(y_k|D_{k-1})$ , determina una constante de normalización.

El cálculo de estos tres términos mediante aproximaciones sucesivas de las integrales que los definen, constituyen la esencia del filtrado y la inferencia bayesiana. Las integrales serán definidas dentro del problema de estimación que se expone a continuación.

El problema de estimación del estado para un sistema no lineal con ruido gaussiano, el cual se plantea en este trabajo, se desea resolver en forma computacional desde el punto de vista bayesiano, esto implica, resolver integrales multidimensionales en forma numérica con algún tipo de solución secuencial, para lo cual, existen los métodos Monte Carlo que usan muestreo estadístico y técnicas de aproximación analíticas para la evaluación de integrales complejas (Smith & Gelfand, 1992). Para la solución secuencial es conveniente considerar el problema de filtrado en una formulación de tiempo discreto, que es como se desarrolla en la práctica (Chen, 2003; Sanjeev et al., 2002), esto implica discretizar el modelo estocástico del MCI como se explicó en la sección 3.2.3. Por lo anterior, se plantea teóricamente, en la siguiente forma el problema de estimación:

Sea el vector de estado  $x_k \in R^n$ , el cual se asume que evoluciona de acuerdo al sistema dinámico mostrado en la Ec. 3-8.

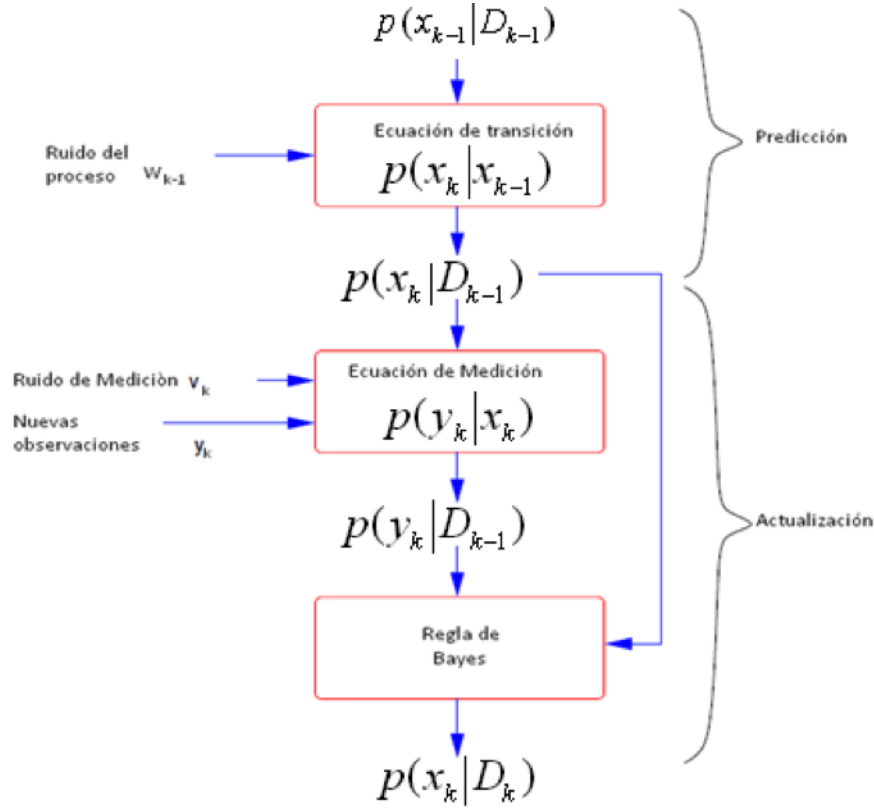
$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (3-8)$$

Donde,  $f_k : R^n \times R^m \rightarrow R^n$  es la función de transición del sistema, no lineal y,  $w_k \in R^n$  es una secuencia ruido blanco con media cero, independiente de su pasado y del estado actual. Se asume que la PDF de  $w_k$  es conocida. El objetivo del problema de filtrado es estimar  $x_{k+1}$  a partir de las mediciones disponibles, las cuales se relacionan con los estados por medio de la ecuación de observación:

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (3-9)$$

Donde,  $h_k : R^n \times R^r \rightarrow R^p$  es la función de medición y  $v_k \in R^n$  es una secuencia ruido blanco con media cero y PDF conocida, independiente de su pasado, del estado actual y del ruido del sistema. La ecuación de estado 3-8 permite calcular la probabilidad de transición del estado  $p(x_k|x_{k-1})$ , mientras que la ecuación de medición 3-9 interviene en el cálculo de la probabilidad  $p(y_k|x_k)$ , la cual se encuentra relacionada con el modelo del ruido de la medición. Se asume que la PDF inicial  $p(x_0|D_0) \equiv p(x_1)$  está disponible para ambas formas funcionales  $f_i$  y  $h_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

La solución total al problema de estimación bayesiana de los estados consiste en construir la PDF del estado  $x_k$  dada toda la información disponible representada por  $p(x_k|D_k)$ . Esta PDF se construye recursivamente en dos pasos: predicción y actualización, como se muestra en la Fig. 3-1. Estos pasos manejan una relación de recurrencia en la reconstrucción de la información a medida que el filtro itera en el tiempo.



**Figura 3-1:** Pasos y PDF calculadas en cada paso del filtro.

En principio, se supone que la PDF  $p(x_{k-1}|D_{k-1})$  requerida en el paso de tiempo  $k - 1$  se encuentra disponible. A partir de esta densidad y del modelo del sistema, es posible obtener la PDF previa del estado  $p(x_k|D_{k-1})$  en el paso de tiempo  $k$ . La ecuación para el cálculo de la previa se muestra en la Ec. 3-10, la cual es conocida como “ecuación de Chapman-Kolmogorov”.

$$p(x_k|D_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|D_{k-1})dx_{k-1} \quad (3-10)$$

Donde,  $p(x_k|x_{k-1})$  se conoce como modelo probabilístico de la evolución del estado o ecuación de transición (ver Fig. **3-1**), el cual, es un proceso de Markov de primer orden definido por la ecuación Ec. 3-8 y por la estadística conocida del ruido del proceso  $w_{k-1}$ . El modelo probabilístico de la evolución del estado se define mediante la Ec. 3-11.

$$p(x_k|x_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}, w_{k-1})p(w_{k-1}|x_{k-1})dw_{k-1} \quad (3-11)$$

Asumiendo que  $p(w_{k-1}|x_{k-1}) \equiv p(w_{k-1})$  se tiene:

$$p(x_k|x_{k-1}) = \int \delta(x_k + f_{k-1}(x_{k-1}, w_{k-1})) \times p(w_{k-1})dw_{k-1} \quad (3-12)$$

Donde,  $\delta(\cdot)$  es la función delta Dirac. La cual surge para legalizar la obtención de  $p(x_k|x_{k-1})$  en forma determinística a partir de las relaciones entre  $x_{k-1}$  y  $w_{k-1}$  en la Ec. 3-8.

Si para el paso de tiempo  $k$  se tiene una medida disponible  $y_k$  esta puede ser usada junto con el modelo de medición (ver Fig. **3-1**) para actualizar la función de densidad previa del estado mediante la regla de Bayes:

$$p(x_k|D_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|D_{k-1})}{p(y_k|D_{k-1})} \quad (3-13)$$

Donde, la constante de normalización está dada por:

$$p(y_k|D_{k-1}) = \int p(y_k|x_k)p(x_k|D_{k-1})dx_k \quad (3-14)$$

La PDF condicional de  $y_k$  dado  $x_k$  o función de verosimilitud (“likelihood”):  $p(y_k|x_k)$ , está definida mediante el modelo de medición Ec. 3-9 y la estadística conocida de  $v_k$ . En la Ec. 3-15 se define su cálculo en forma puramente determinista.

$$p(y_k|x_k) = \int \delta(y_k - h_k(x_k, v_k))p(v_k)dv_k \quad (3-15)$$

En el paso de actualización dado por la Ec. 3-13, la medición  $y_k$  se usa para modificar la densidad previa y obtener la densidad posterior del estado  $p(x_k|D_k)$ , la cual contiene toda la información válida acerca del vector de estado y es la solución completa al problema de estimación bayesiana. Las relaciones de recurrencia de la Ec. 3-10 (paso de la predicción) y la Ec. 3-13 (paso de la actualización), constituyen la solución formal al problema de estimación recursiva bayesiano.

### 3.5. MÉTODO MONTE CARLO SECUENCIAL (SIS)

Las técnicas Monte Carlo utilizan muestreo estadístico y técnicas de estimación para dar solución a problemas de integración numérica intratables analíticamente. La técnica que se aplica en este trabajo, es el “muestreo de Monte Carlo”, el cual se desarrolla para estimación de variables y está orientada a la reducción de la varianza de las muestras (Quintero, 2009). El objetivo del muestreo Monte Carlo es estimar recursivamente la densidad posterior del estado y sus características asociadas como: la densidad de filtrado y el valor esperado de los estados respecto a las observaciones. Una de las grandes ventajas de esta técnica con respecto a otros métodos de aproximación es que la exactitud de la estimación es independiente de la dimensionalidad del vector de estado.

En el caso de un sistema lineal sujeto a ruido gaussiano, la densidad posterior del estado es también gaussiana; por lo cual, esta pertenece a una clase de funciones que puede ser parametrizada mediante la media y la covarianza y así representarse estadísticamente en cada instante de muestreo. Sin embargo, para un sistema no lineal con ruido gaussiano asociado, como el caso del MCI, formulado mediante la Ec. 3-8 y la Ec. 3-9, es generalmente imposible encontrar una clase de funciones que parametrize la densidad posterior del estado. La idea con el muestreo Monte Carlo, específicamente con el muestreo de importancia secuencial, en inglés: “Sequential Importance Sampling” (SIS) es “usar un conjunto de muestras aleatorias, con unos pesos asociados para representar la densidad posterior en vez de una clase de funciones parametrizadas”. De esta forma, se logra enfrentar problemas no lineales no gaussianos o, no lineales-gaussianos en forma sistemática.



El soporte teórico de la aproximación Monte Carlo se basa en la integral de Lebesgue (ó Lebesgue-Stieltjes) tomada con respecto a una función de distribución o medida de probabilidad; físicamente, este operador es una versión probabilística del centro de gravedad de un cuerpo físico; análogamente, se puede decir, que esta integral concentra la información sobre una variable aleatoria en un simple número, denominado esperanza matemática. Se parte de la consideración que la distribución condicional del estado dadas las observaciones  $p(x_k|D_k)$  tiene una densidad cuadrado integrable con respecto a una medida de referencia, en particular, con respecto a una medida de Lebesgue.

La teoría de aproximación Monte Carlo matemáticamente se expresa así:

Considere para un problema de estimación estadística la integral de Lebesgue-Stieltjes:

$$\int_X f(x)dP(x) \quad (3-16)$$

Donde  $f(x)$  es una función integrable en un espacio de medida  $X$ . El muestreo Monte Carlo usa un número de variables aleatorias independientes en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  para aproximar la integral verdadera. La técnica consiste en arrastrar una secuencia de  $N_p$  muestras aleatorias  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N_p)}\}$  desde una distribución de probabilidad  $P(x)$ . Entonces la estimación  $\hat{f}(x)$  de  $f(x)$  esta dada por:

$$\hat{f}_{N_p} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} f(x^{(i)}) \quad (3-17)$$

Para la cual se cumple que:

$$E[\hat{f}_{N_p}] = E[f] \quad y \quad var[\hat{f}_{N_p}] = \frac{1}{N_p} var[f] \quad (3-18)$$

Por medio de la ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov,  $\hat{f}_{N_p}(x)$  converge casi seguro a  $E[f(x)]$  y su velocidad de convergencia está asegurada por el teorema central del límite (ver anexos para estas definiciones). Adicionalmente, la varianza de la estimación es inversamente proporcional al número de muestras.

### 3.6. FILTRO DE PARTÍCULAS (“BOOTSTRAP”)

Suponga que se tienen un conjunto de muestras aleatorias  $\{x_{k-1}(i) : i = 1, \dots, N_p\}$  arrastradas de la PDF  $p(x_{k-1}|D_{k-1})$ . El filtro “bootstrap” es un algoritmo para propagar y actualizar el estado a través de estas muestras obteniendo un conjunto de valores  $\{x_k(i) : i = 1, \dots, N_p\}$  las cuales están aproximadamente distribuidas como  $p(x_k|D_k)$ . El muestreo Monte Carlo mecaniza las relaciones de recurrencia del paso de predicción (Ec. 3-10) y el paso de actualización (Ec. 3-13) en el algoritmo de filtrado. A continuación se expondrá el algoritmo del filtro.

- *Predicción:* Cada muestra es evaluada dentro del modelo del sistema para obtener muestras de la previa en el paso de tiempo  $k$ , esta se representa por el conjunto  $x_k^*(i)$  definido en la Ec. 3-19.

$$x_k^* = f_{k-1}(x_{k-1}(i), w_{k-1}(i)) \quad (3-19)$$

Donde  $w_{k-1}(i)$  es una muestra arrastrada de la PDF del ruido del sistema (ruido blanco gaussiano)  $p(w_{k-1})$ .

- *Actualización:* A partir de la recepción de una medición  $y_k$ , evaluar la probabilidad (“likelihood”) de cada muestra previa y obtener un peso normalizado para cada muestra, el peso se representa por  $q_i$ .

$$q_i = \frac{p(y_k|x_k^*(i))}{\sum_{j=1}^{N_p} p(y_k|x_k^*(j))} \quad (3-20)$$

Así se define una distribución discreta sobre  $\{x_k^*(i) : i = 1, \dots, N_p\}$  con probabilidad de masa  $q_i$  asociada con el elemento  $i$ . Luego se remuestrea  $N_p$  veces desde la distribución discreta para generar muestras  $\{x_k(i) : i = 1, \dots, N_p\}$ , tal que para algún  $j$ ,  $Pr\{x_k(j) = x_k^*(i)\} = q_i$ .

Para inicializar el algoritmo,  $N_p$  muestras son arrastradas de una previa conocida  $p(x_1)$ , estas muestras alimentan directamente el paso de actualización del filtro.

El “bootstrap” incluye el remuestreo en el paso de la actualización, se desarrolla arrastrando muestras simples  $\mu_i$  de una densidad o forma funcional conocida que sirva como densidad de referencia para la estimación, esta es una densidad que sirve para seleccionar muestras según su valor de peso asociado, es decir, la alta o baja probabilidad de muestra. Para este trabajo se selecciona una distribución uniforme sobre  $(0, 1]$ . La muestra seleccionada alimenta al conjunto de muestras de la posterior que es la solución al problema de filtrado. La selección de las muestras  $x_k^*(L)$  se rige por el criterio mostrado en la Ec. 3-21, el cual se repite para  $i = 1, \dots, N_p$ , con  $N_p$  como el número de partículas.

$$\sum_{j=0}^{L-1} q_j < \mu_i \leq \sum_{j=0}^L q_j \quad (3-21)$$

### 3.7. PSEUDOCÓDIGO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO DE PARTÍCULAS

Paso 1: Inicializar el vector de estados  $x_1$  del modelo.

Paso 2: Asumir conocida la PDF inicial como  $p(x_1|D_0) = p(x_1)$ .

Paso 3:

Para  $K = 1 : N - 1$  (con  $N$ , número de pasos de tiempo)

Para  $i = 1 : N_p$  (con  $N_p$  número de partículas)

- Arrancar muestras  $w_{k-1}$  de la PDF del ruido del sistema  $p(w_{k-1})$ .
- Generar muestras de la previa:  $x_h^*(i) = f_{k-1}(x_{k-1}(i), w_{k-1}(i))$  (Predicción).

Fin

- Calcular pesos de importancia:  $q_i = \frac{p(y_k|x_k^*(i))}{\sum_{j=1}^{N_p} p(y_k|x_k^*(j))}$ , con  $i = 1, \dots, N_p$

- Actualizar los estados o paso del remuestreo (Actualización)
  - Arrastrar muestras  $\mu_i$  de una distribución uniforme sobre  $(0, 1]$ , con  $i = 1 \dots N_p$
  - Seleccionar muestras  $x_k^*(L)$  para la posterior del estado mediante el criterio:  $\sum_{j=0}^{L-1} q_j <$

$$\mu_i \leq \sum_{j=0}^L q_j$$

Fin

## Capítulo 4

# Resultados y análisis de resultados de la modelación del MCI y el filtrado bayesiano

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizan los resultados del modelado del MCI. Se valida el modelo usando datos experimentales tomados del banco de pruebas construido para el desarrollo del trabajo. Se calcula el nivel de exactitud para el modelo propuesto del MCI, mediante la comparación de los errores relativos y absolutos obtenidos con los datos del sistema real. Con base en el modelo construido y validado, se muestran la estimación del filtro de partículas del tipo muestreo de importancia de los estados, se realiza el análisis de las propiedades estadísticas del filtro de partículas. Para tal fin, se utiliza los criterios de: desviaciones estándar, histogramas y esperanzas aplicados a las estimaciones con independientes números de partículas.

### 4.2. REGIMENES DE TRABAJO CONSIDERADOS PARA EL SISTEMA FÍSICO

El MCI se analiza en dos modos o regímenes de excitación en vacío: ralentí y un escalón (delta) de aceleración como se muestra en la Fig. 4-1. Esta gráfica es obtenida a partir de ensayos realizados en el banco de pruebas del MCI, el cual se muestra en la Fig. 4-2. Se utilizan los sensores del motor con sistema de acondicionamiento electrónico y un programa desarrollado en Labview® para generar las acciones de excitación al motor, el monitoreo y el registro de las señales.

En el estado de ralentí la dinámica del motor de combustión presenta un régimen mínimo de revoluciones por minuto (rpm) para permanecer en funcionamiento de forma estable sin que exista la necesidad de accionar un mecanismo de aceleración. Este régimen se encuentra comprendido según las condiciones de la máquina entre 73,5 a 115,5 rad/s o equivalentemente, 700 a 1.100 rpm, esto se puede apreciar en la Fig. 4-1 donde la media en velocidad ralentí de los datos encerrados en el recuadro es de 82.64 rad/s. Esto prueba que las condiciones del motor esta dentro de la normalidad.

En el régimen acelerado, el MCI se excita desde el estado ralentí hasta que alcanza una aceleración constante de 216.19 rad/s (2064 rpm) pasando por un estado transitorio, en el cual sólo debe vencer la potencia consumida por su mecánica interna ya que el motor se encuentra para ambos regímenes sin carga externa (en vacío). El tiempo total de la excitación fue de 90 s.

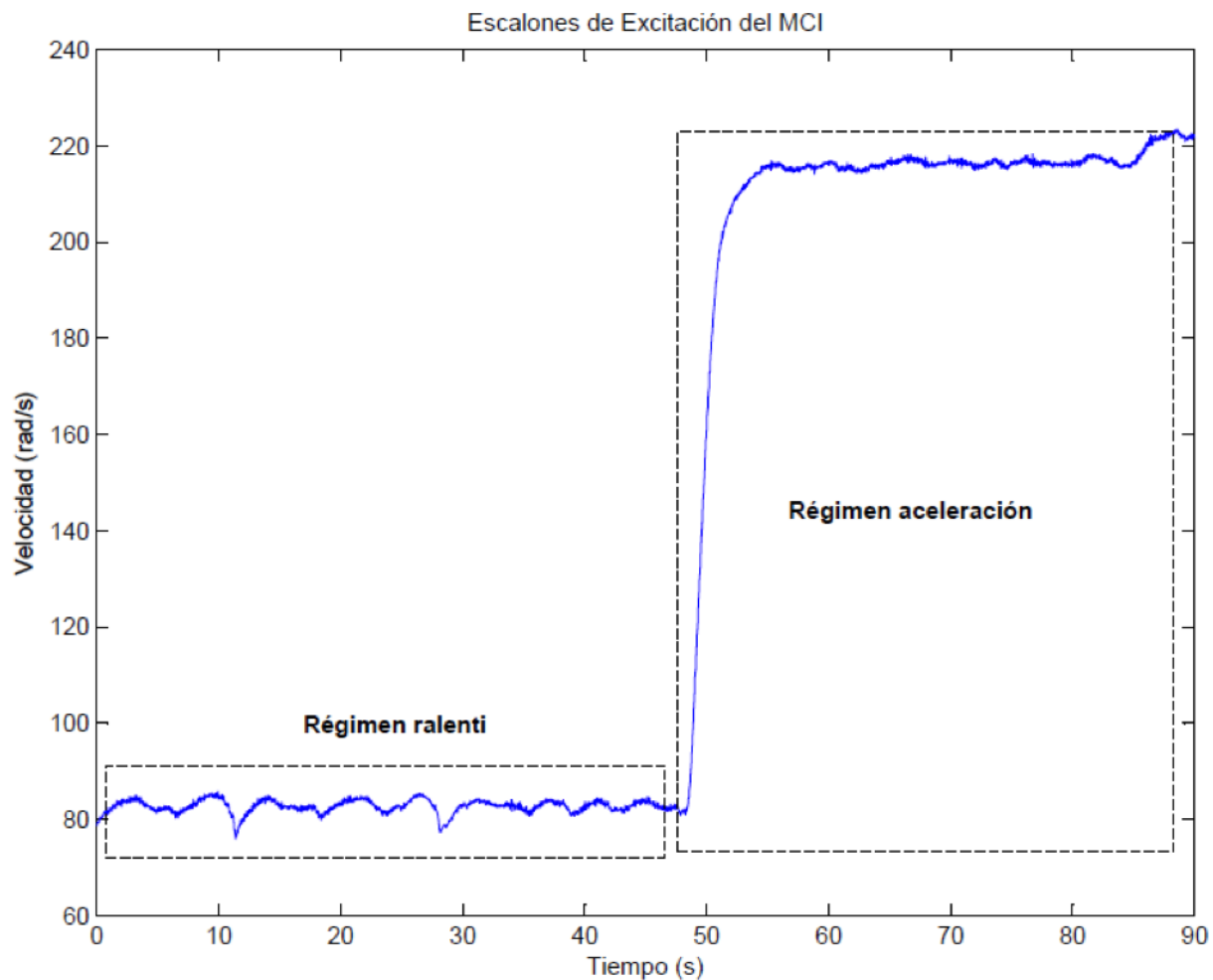


Figura 4-1: Escalones de excitación del MCI.



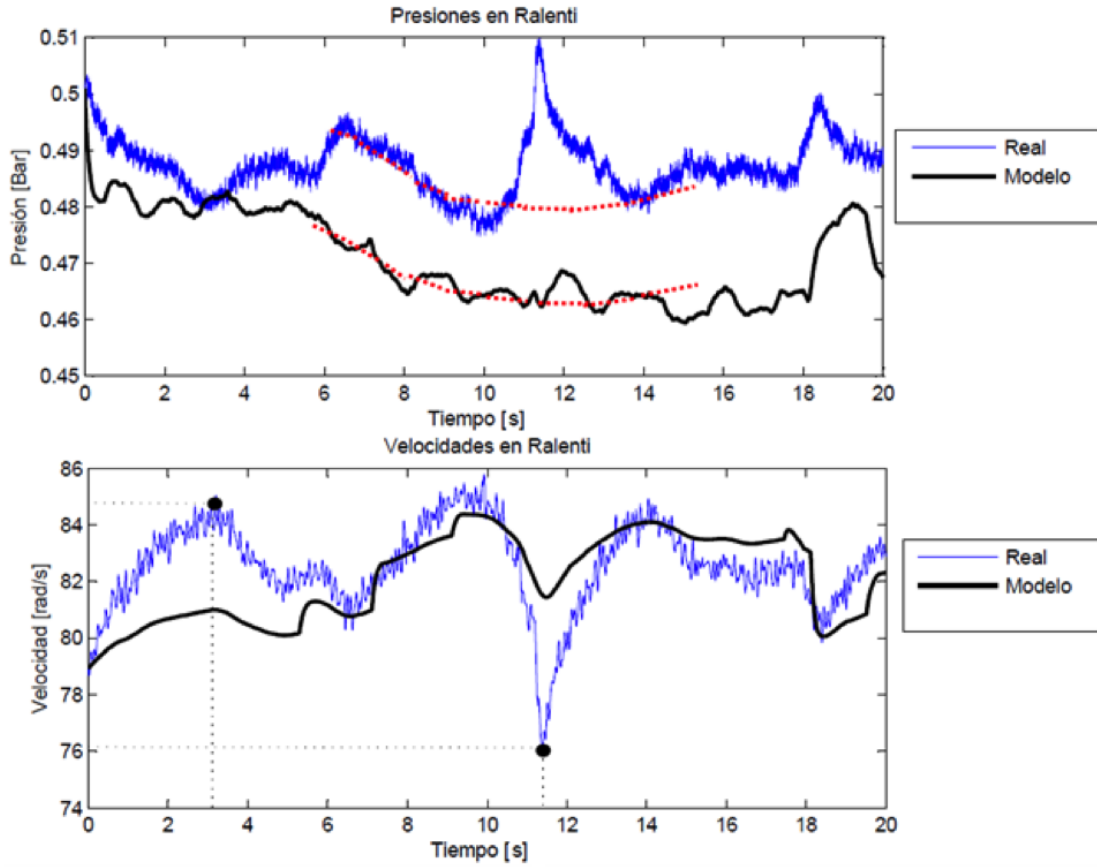
**Figura 4-2:** Banco de ensayo del MCI.

### 4.3. ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO DEL MCI EN DINÁMICA RALENTI

En la Fig. 4-3, se muestran los 20 primeros segundos de la excitación del motor en régimen ralenti. Para validar los estados  $x_1(P_m)$  y  $x_2(\omega_m)$  del modelo de estados discretos, se utilizan las mediciones del sensor de presión en el múltiple y el sensor de velocidad angular. Se utilizan los errores relativos y absolutos para cuantificar la exactitud en estas variables.

Las variables de estado  $x_3, x_4$  no son observables dentro del sistema ya que su dinámica se encuentra al interior de la cámara de combustión del MCI donde es imposible medir directamente, el modelo que soporta el comportamiento de estas variables en el tiempo es fenomenológico como ya se explicó en la sección 3.2 (Aquino, 1981). Sin embargo como el modelo del MCI se encuentra definido como un sistema de ecuaciones acoplado tal como se definió en la Ec. 2-31, entonces la validación de éstos intrínsecamente se asumen del proceso de validación de  $x_1$  y  $x_2$ . Al modelo discreto discreto se le adiciona ruido gaussiano de baja intensidad ( $10^{-6}$ ) y a las observaciones ruido gaussiano de ( $10^{-5}$ ).

En dinámica ralenti la presión en el múltiple de admisión ( $P_m$ ) y la velocidad angular del MCI ( $\omega_m$ ) se ven afectadas por las entradas de control al sistema  $\mu_1 = \alpha$  y  $\mu_2 = \dot{m}_\psi$  correspondientes a el paso de flujo de aire y la inyección de combustible. En condiciones de marcha normal del MCI, el paso de flujo de aire se encuentra controlado por las demandas requeridas por la carga, sin embargo en el estado ralenti, el control de paso mínimo de aire es regulado por una válvula de marcha mínima para mantener la condición “marcha mínima” o revoluciones mínimas con el motor sin carga. El comportamiento oscilante de esta válvula afecta de esa misma manera el flujo de aire al motor y por tanto modifica la presión en el múltiple, tal como se planteó en la relación matemática de la Ec. 2-10. En la segunda ecuación de estado del modelo del MCI mostrado en la Ec. 2-31 se observa como la presión ( $P_m$  ó  $x_1$ ) afecta la velocidad ( $\omega_m$  ó  $x_2$ ) a través de la función de eficiencia volumétrica, esto quiere decir, que la oscilaciones de la variable presión afectarían de esta misma manera a la variable velocidad. Adicionalmente la dinámica ralenti es una condición que se mantiene estable forzadamente y esto se refleja en las oscilaciones  $P_m$  y  $\omega_m$  que se observan en la Fig. 4-3.

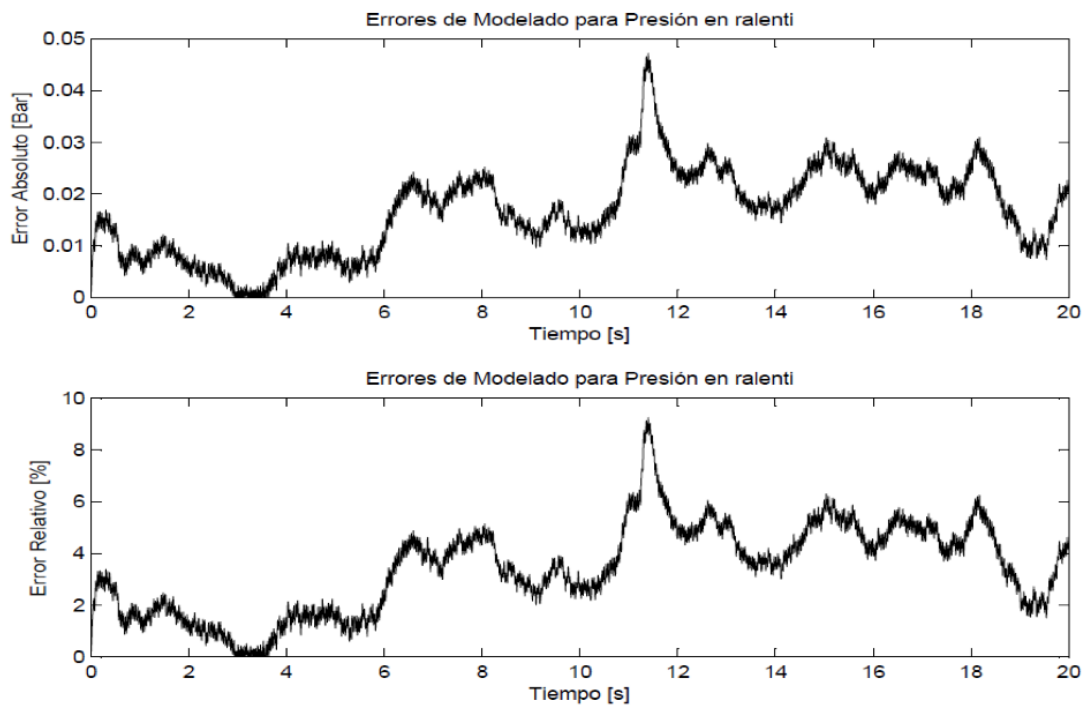


**Figura 4-3:** Validación del modelo matemático en dinámica ralenti del MCI.

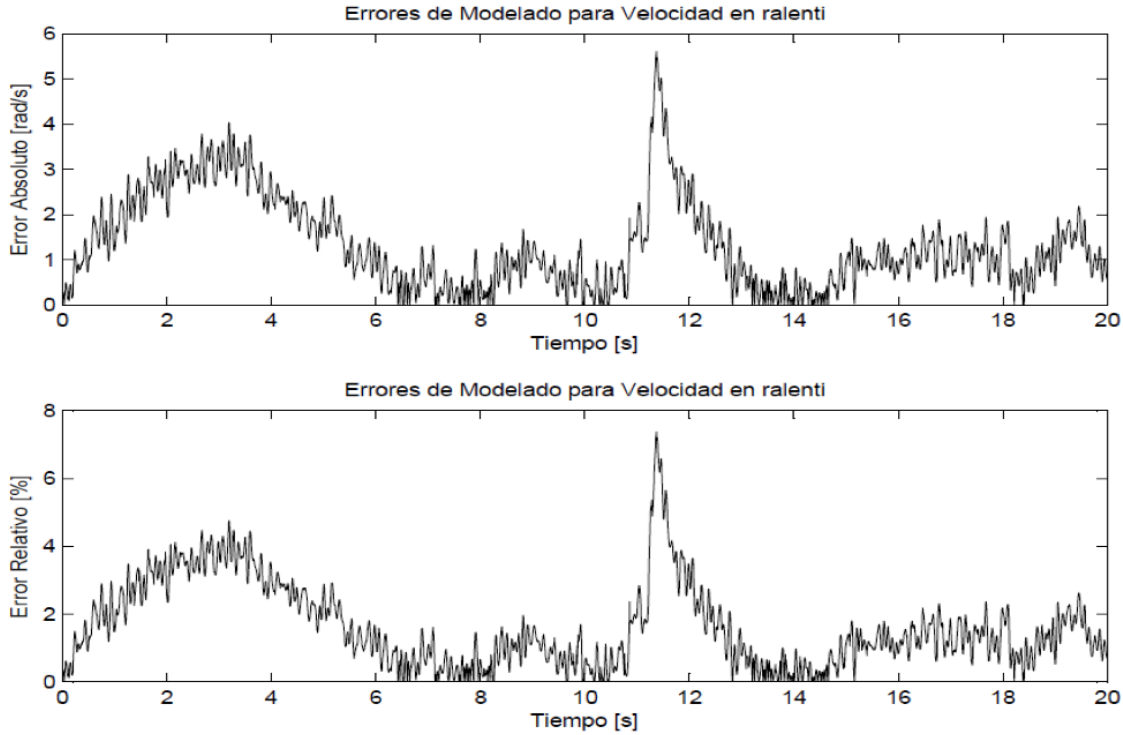


Respecto a la tendencia que el modelo propuesto sigue, en la Fig. 4-3 se observa que éste ejecuta el seguimiento de las variaciones repentinas ocasionadas por la respuesta forzada en el ralenti de la máquina. Por ejemplo, en la marca con  $t = 3,2$  s, la velocidad real, sube hasta los  $85 \text{ rad/s}$  aproximadamente, así mismo la velocidad del modelo tiene la tendencia a subir también hasta los  $81 \text{ rad/s}$ . En  $t = 11,3$  s la velocidad angular disminuye instantáneamente y el modelo responde igualmente bajando la velocidad. Con las líneas rojas en la gráfica de presión se quiere resaltar se quiere marcar un seguimiento de tendencia similar realizado por el modelo y el sistema real.

En la Fig. 4-4 se muestran los errores relativos y absolutos del modelado de presión en la dinámica ralenti. Se consigue un error máximo de  $0,047 \text{ bar}$  equivalente a un error relativo del  $9,2\%$ ; con ello se puede decir que para el estado ralenti la presión modelada presenta un nivel de exactitud de mínimo  $90,8\%$ . Para la validación de resultados de la velocidad angular real y la del modelo se muestran los resultados de los errores en la Fig. 4-5. Se consigue un error máximo de  $5,6 \text{ rad/s}$  equivalente a un error relativo de  $7,2\%$ , el nivel de exactitud alcanzado por el modelo para esta variable es de  $92,8\%$ .



**Figura 4-4:** Errores relativos y errores absolutos del modelado de presión en ralenti.

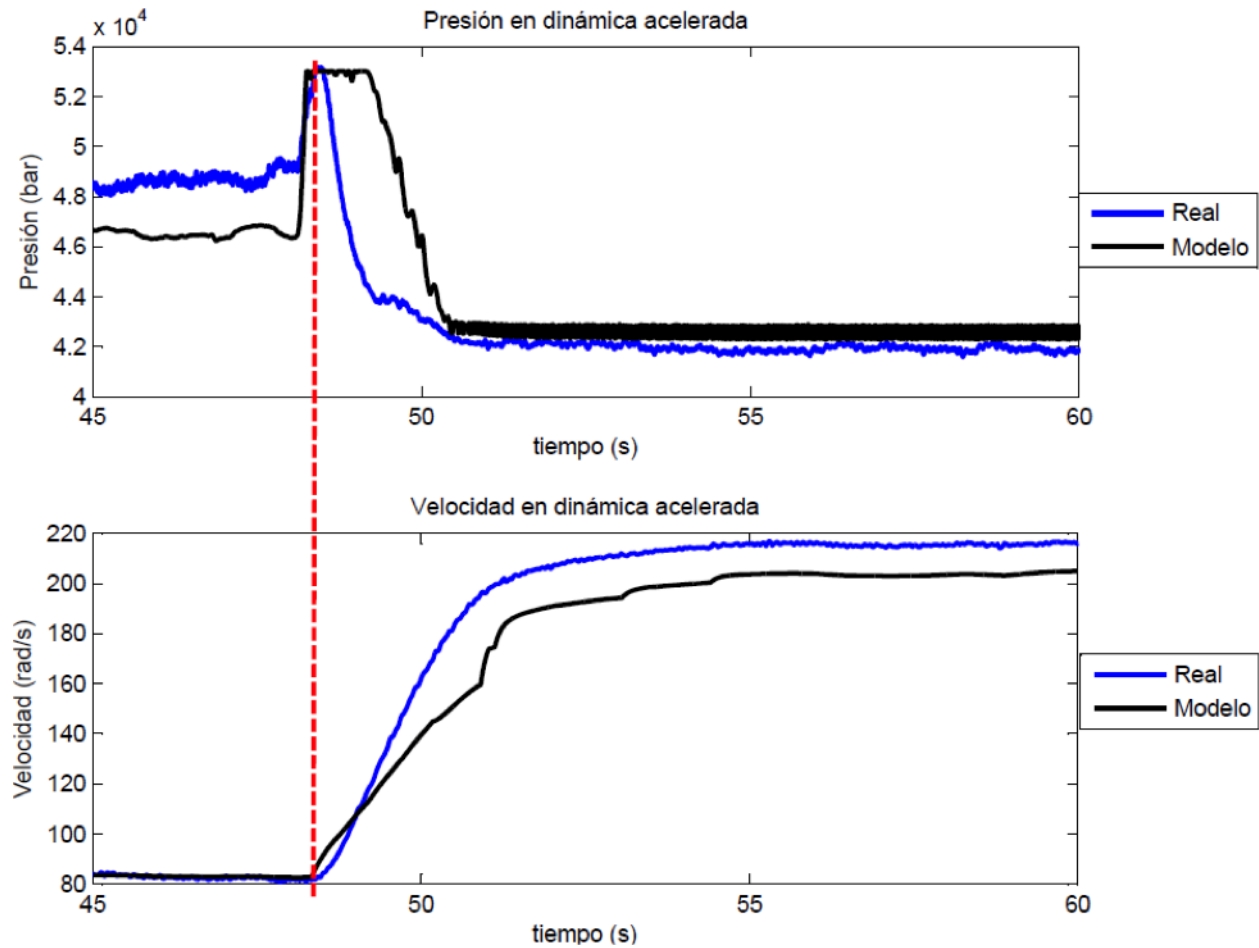


**Figura 4-5:** Errores relativos y errores absolutos del modelado de velocidad en ralenti.

#### 4.4. ANÁLISIS DEL MODELO MCI EN DINÁMICA ACCELERADA

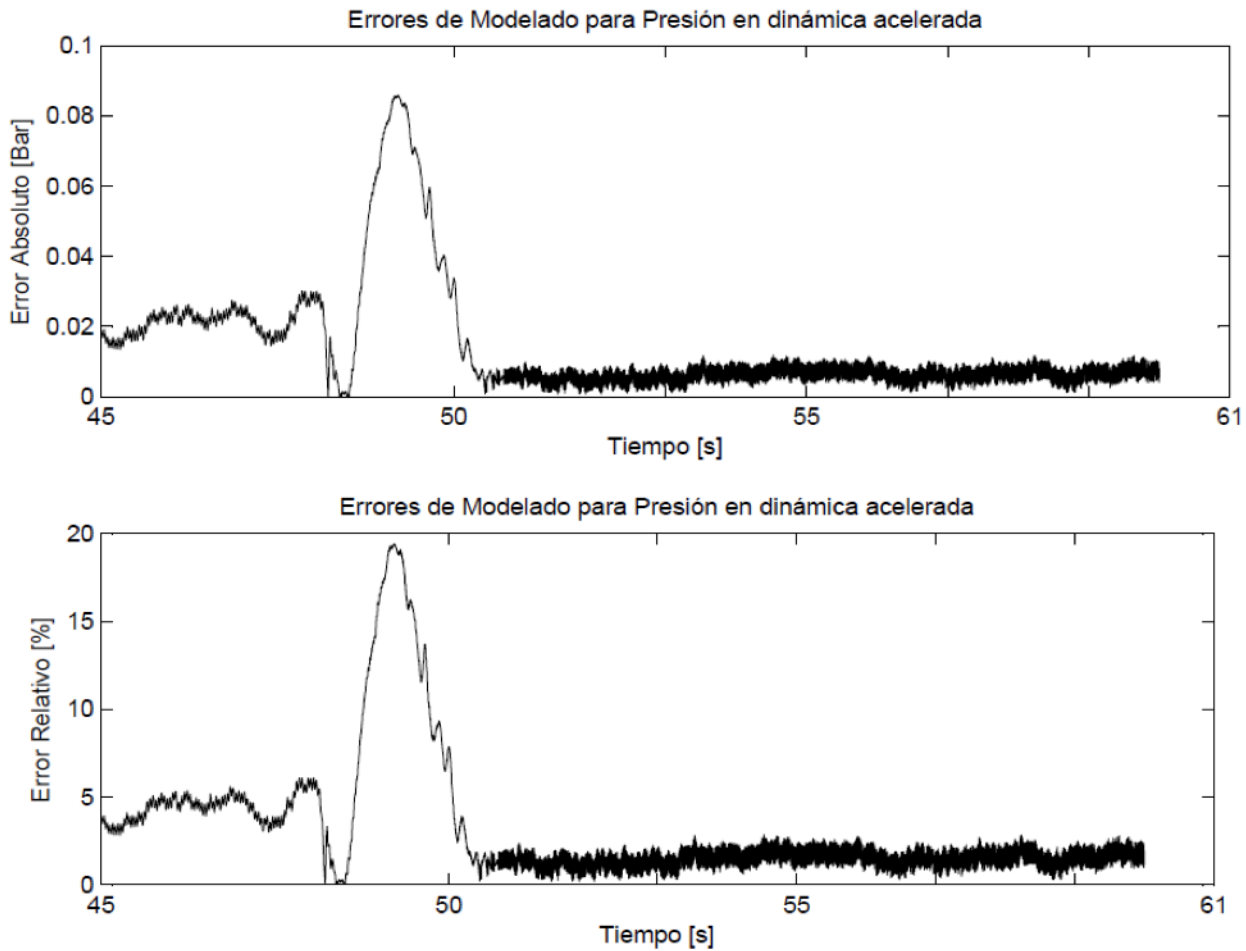
Siguiendo la misma línea de tiempo de las mediciones en la Fig. 4-1, luego del estado ralenti, el motor es excitado con un escalón de aceleración en  $t = 48,27s$  marcado por la línea roja en la Fig. 4-6. Los datos mostrados obedecen a la dinámica acelerada del MCI en vacío, teniendo cuidado de incluir la respuesta transitoria de los estados, con el fin de probar la robustez de la modelación en otro modo de operación distinto al ralenti.

En la Fig. 4-6 superior se compara el comportamiento de la presión real con la modelada. Se observa que la presión es estable inicialmente debido al estado anterior de ralenti; cuando se ejecuta el paso de aceleración al sistema, para un cambio de  $900\text{ rpm}$  a  $2064\text{ rpm}$ ; la presión de vacío aumenta transitoriamente, luego decae para finalmente quedarse en un estado de valor estable. Es de interés resaltar que el modelo se ajustó bien al cambio abrupto de energía proporcionado al sistema, esto es robustez. Sin embargo, la duración del transitorio en el modelo es mayor que el sistema real y por tanto el modelo se adelanta en el tiempo respecto al sistema. La respuesta del modelo en velocidad angular es muy similar a la del sistema real, como se puede observar de la figura.



**Figura 4-6:** Validación del modelo matemático en dinámica acelerada del MCI.

Los errores absolutos y relativos en dinámica acelerada para presión se muestran en la Fig. 4-7. El máximo error absoluto fue de 0,085 *bar* correspondiente a un error relativo de 19,37 % el cual se presentó durante el régimen transitorio del sistema. El error relativo en el estado estable de la presión fue de 1,43 %, el cual se utiliza para evaluar el nivel de exactitud de la modelación; el cual fue de 98,57 %.



**Figura 4-7:** Errores relativos y errores absolutos del modelado de presión en aceleración.

Los errores absolutos y relativos en dinámica acelerada para la velocidad angular se muestran en la Fig. 4-8. El máximo error absoluto fue de  $35,99 \text{ rad/s}$  correspondientes a un error relativo de  $18,34\%$ ; el cual se presentó durante la respuesta transitoria del sistema. El error relativo en el estado estable de la velocidad fue de  $5,5\%$ , el cual se utiliza para evaluar el nivel de exactitud de la modelación, el cual fue de  $94,5\%$ .

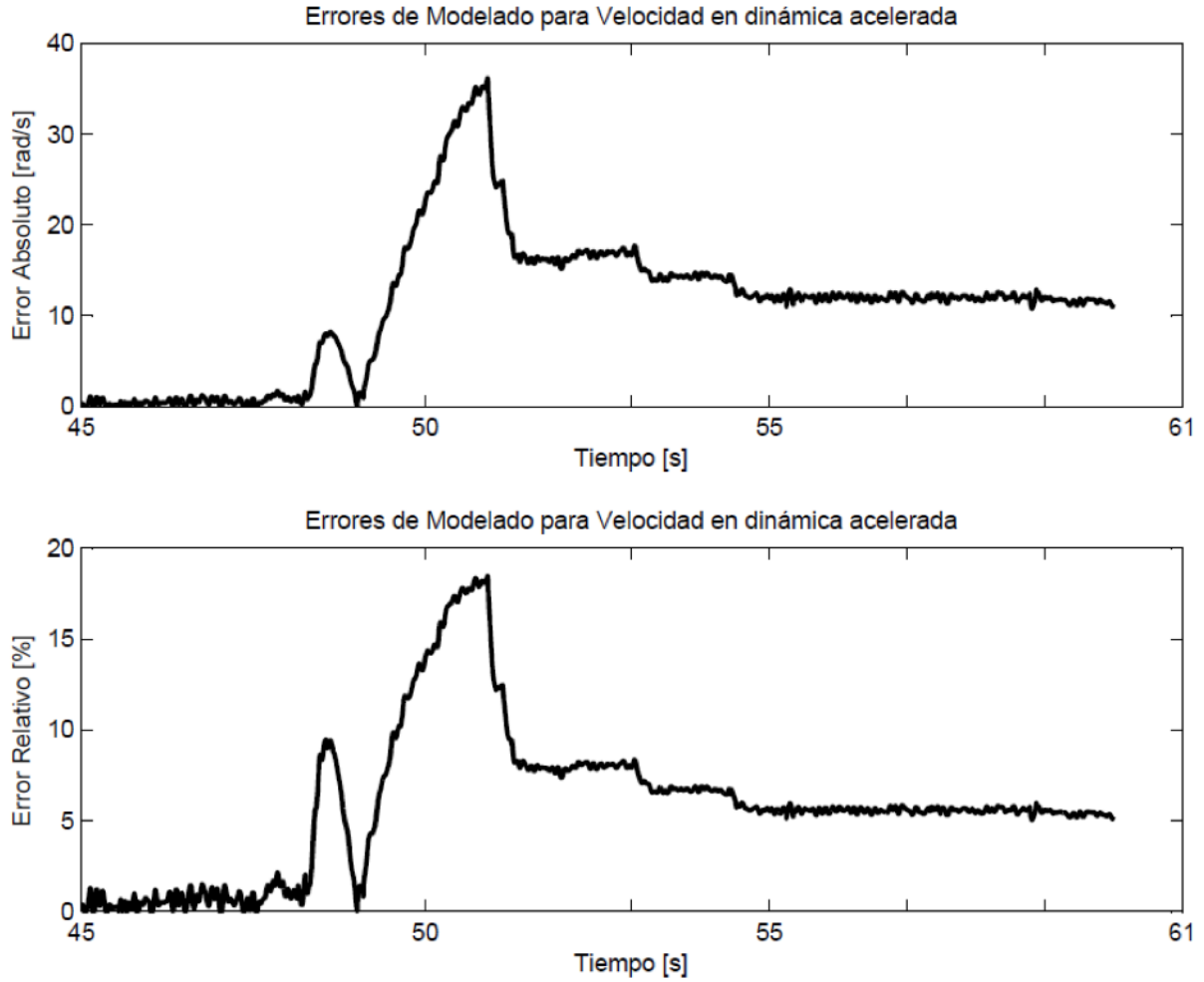
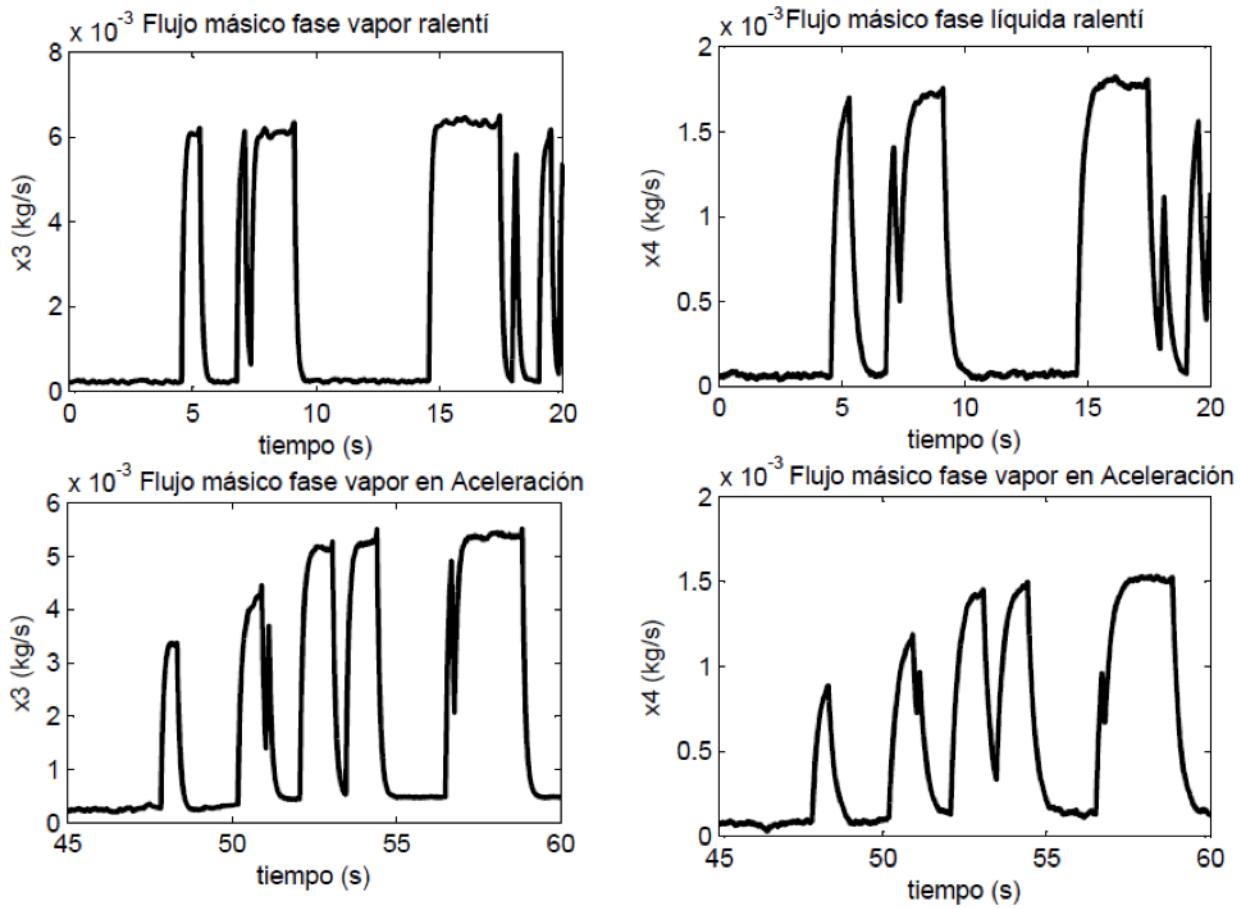


Figura 4-8: Errores relativos y errores absolutos del modelado de velocidad en aceleración.

## 4.5. VALIDACIÓN DE LOS ESTADOS X3 Y X4 DEL MODELO DEL MCI

Los estados  $x_3$  y  $x_4$  correspondientes respectivamente a flujos másicos de fase vapor  $\dot{m}_{fv}$  y líquido  $\dot{m}_{fl}$  del combustible inyectado son no medibles, debido a que se encuentran al interior de la cámara de combustión. Adicionalmente su dinámica no está definida en el marco de tiempo continuo o ciclo largo como  $P_m(x_1)$  y  $\omega_m(x_2)$  sino que son instantáneas o de ciclo corto (Hendrincks & Sorenson, 1990). Una manera indirecta de validar sus resultados dentro del modelo, es el hecho de que el modelo se encuentra acoplado, se compactaron en un mismo sistema de tiempo continuo las variables instantáneas, esto se mostró en la Ec. 2-31. Por lo tanto, la convergencia de  $P_m(x_1)$  y  $\omega_m(x_2)$  verifican convergencia de  $\dot{m}_{fv}(x_3)$  y  $\dot{m}_{fl}(x_4)$ .



**Figura 4-9:** Flujos máxicos de fase vapor y fase líquida en régimen ralenti y acelerado.

Teniedo en mente los resultados del modelo desarrollado, se puede comenzar a discutir acerca de la viabilidad del desarrollo de un filtro bayesiano que permita obtener aproximaciones a los estados no medibles mediante las medidas de las observaciones o mediciones de las salidas del sistema. Si se tiene una buena modelación de presión y velocidad acoplados con flujos máxicos de combustible en fase vapor y líquida, se puede dar por sentado que este es el modelo base para lograr las mejores estimaciones de estas variables no medibles mediante filtros que permitan aproximar sus valores reales sujetos a perturbaciones estocásticas propias del sistema, que son de naturaleza mecánica o eléctrica.

## 4.6. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN DEL FILTRO EN RALENTI Y ACELERACIÓN

En la Fig. 4-10 se muestran las estimaciones del filtro para los estados del modelo en régimen ralenti con un  $N_p = 100$  (número de partículas) y en la Fig. 4-11 se muestran las estimaciones del filtro para la dinámica de aceleración con un  $N_p = 500$ . Se observa en ambas graficas que la predicción del filtro sigue la trayectoria del modelo en forma contundente. Al aumentar el número de partículas para la muestra del estado en la ejecución del algoritmo de filtrado, la estimación debe mejorar. Sin embargo, en este caso, se puede estimar los estados del modelo indistintamente con 100 ó 500 partículas ya que la estimación es igualmente buena. Igualmente, la estimación del filtro no se ve afectada por el cambio de dinámicas del modelo (ralenti y aceleración) porque respondió en forma eficiente en ambos regímenes de trabajo.

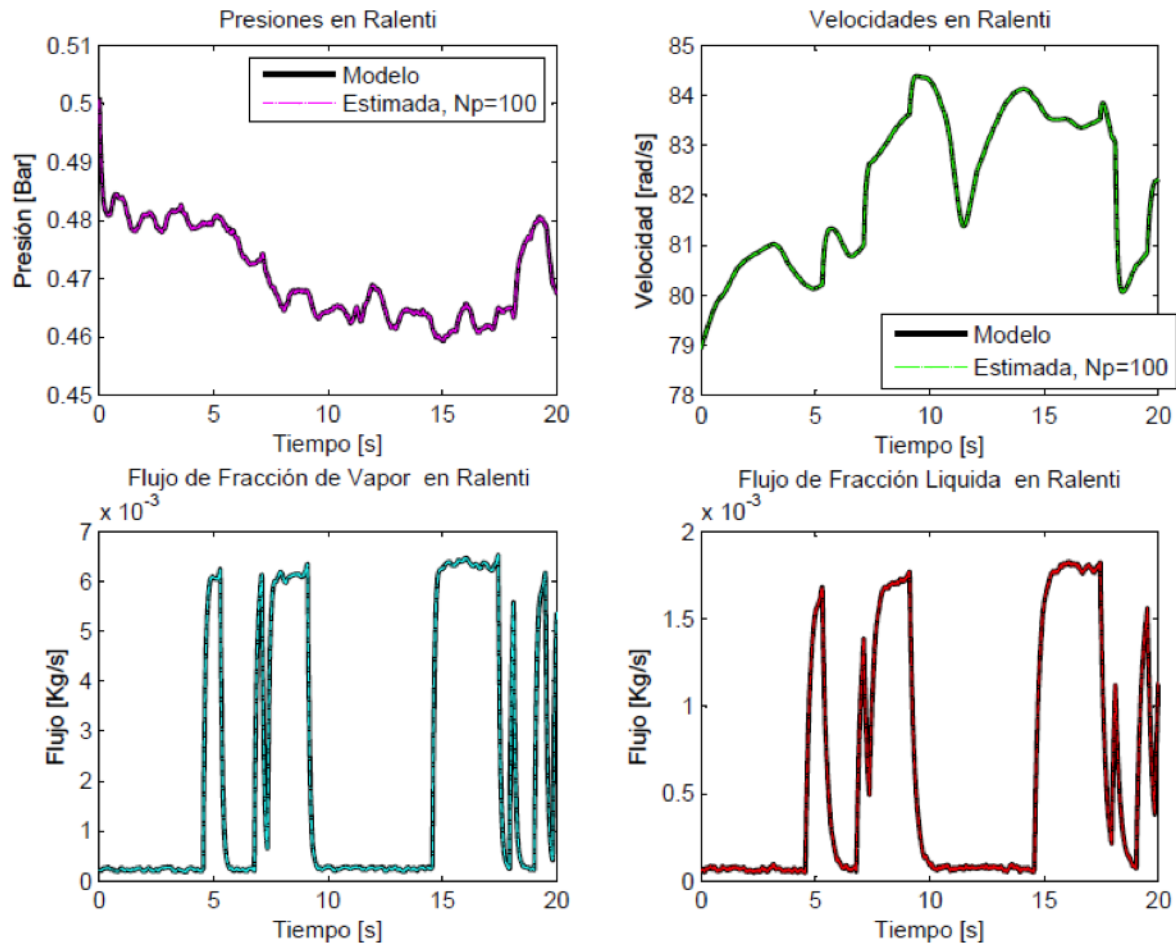
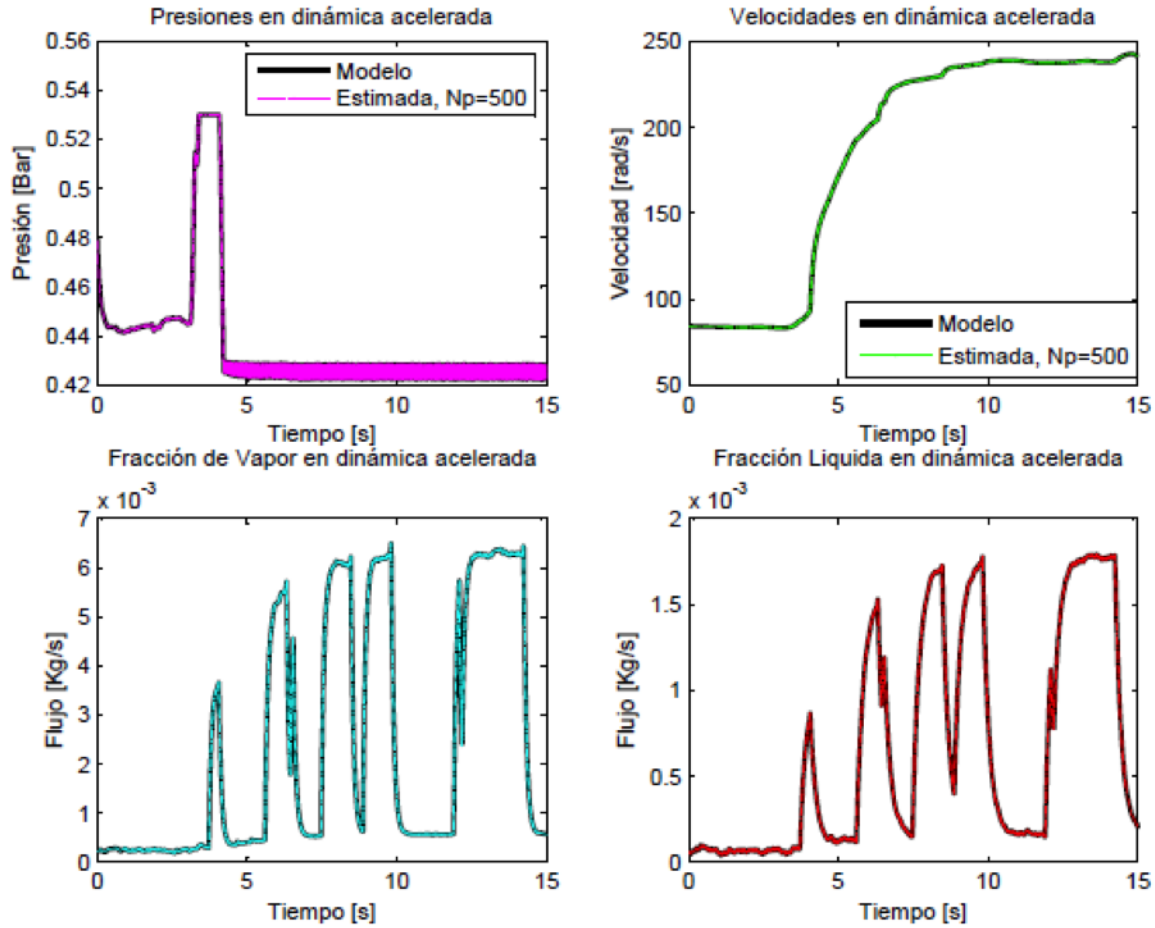


Figura 4-10: Estimaciones del filtro de partículas con 100 partículas.



**Figura 4-11:** Estimaciones del filtro de partículas con 500 partículas.

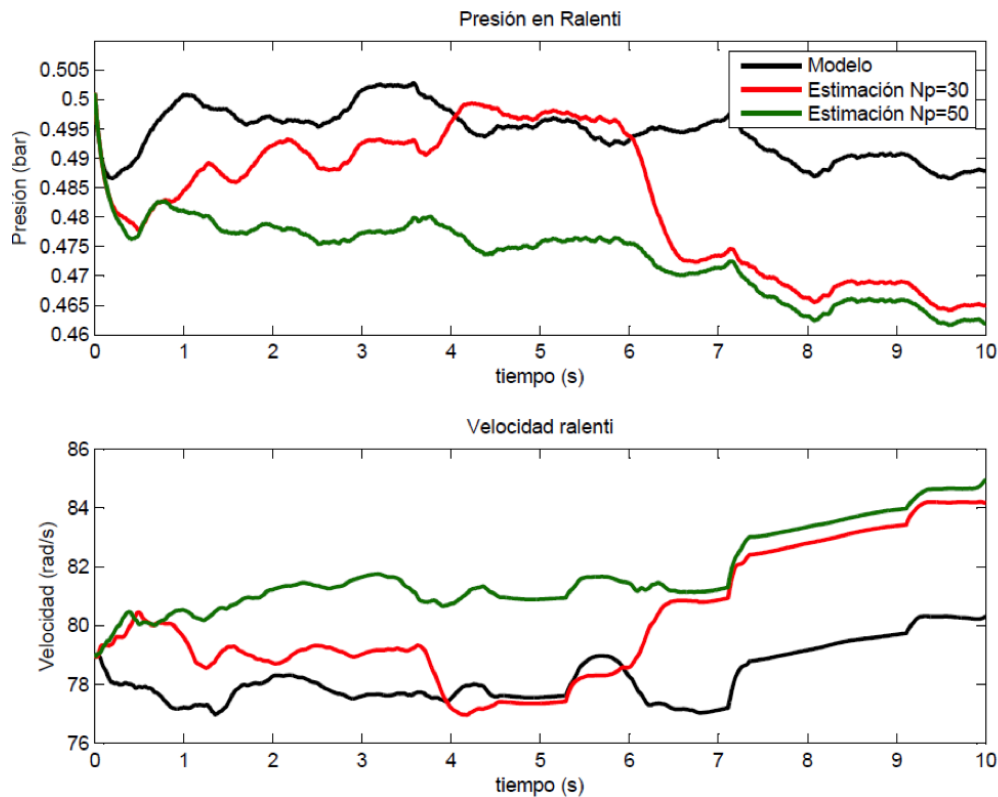
Uno de los fundamentos matemáticos en la teoría de estimación mediante filtros por muestreo Monte Carlo es la ley fuerte de grandes números, la cual en este caso asegura que a medida que se aumenta el número de partículas o muestras del estado se realiza una mejor estimación del estado. Para realizar la comprobación de esta ley, se efectuaron estimaciones para diferente número de partículas con 10000 pasos de ejecución del filtro. En la Fig. 4-12 y Fig. 4-13 se muestran las estimaciones de los 4 estados del modelo del MCI para diferente número de partículas ( $N_p$ ). Primero se realiza una estimación con un  $N_p = 30$  y luego se aumenta a un  $N_p = 50$  obteniendo la desviación estándar de cada estado estimado, con el fin de compararlas, estas se pueden observar de la Tabla 1.

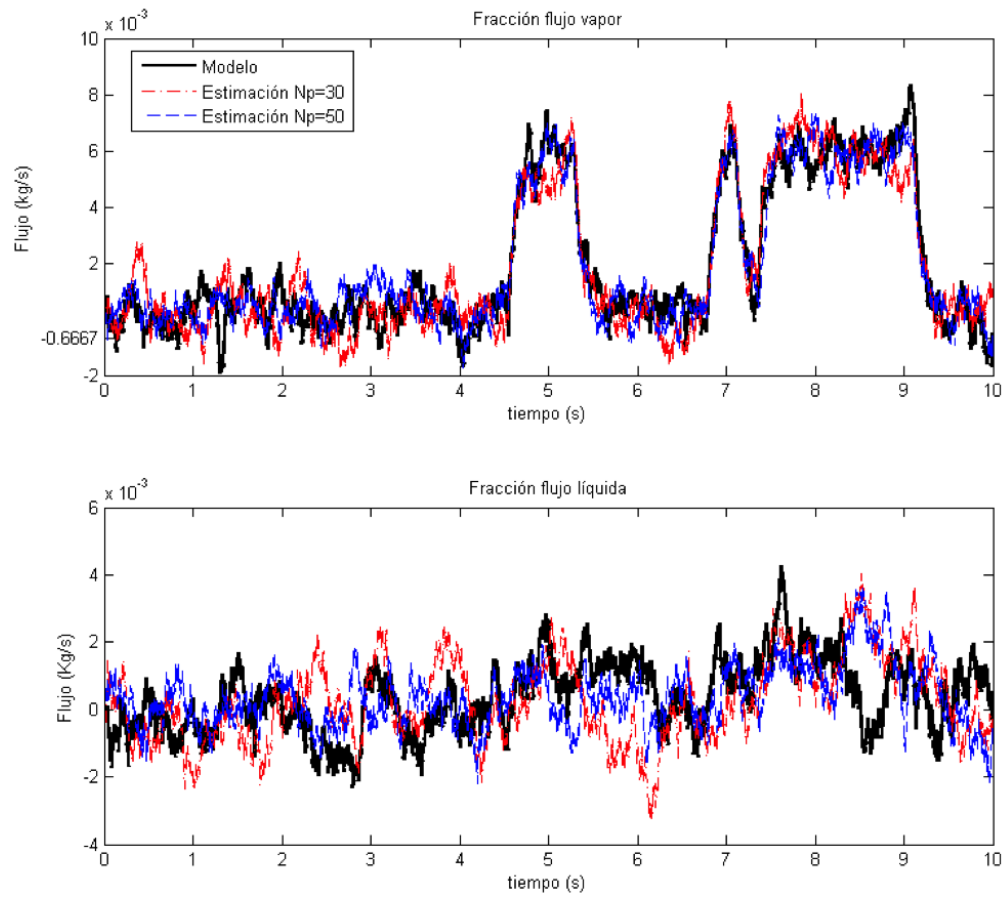


**Tabla 4-1:** Comparación de las desviaciones de la estimación para diferente número de partículas.

Estado	Desviación con $N_p = 30$	Desviación con $N_p = 50$
$X_1$ (Presión)	0.0117	0.0063
$X_2$ (Velocidad)	2.1810	1.377
$X_3$ (Fr. Flujo vapor)	0.0025	0.0024
$X_4$ (Fr. Flujo líquido)	0.0012	0.0009

Se encuentra que las desviaciones de las estimaciones son menores cuando se aumenta el número de partículas muestreadas del estado. Esto quiere decir, que las estimaciones del estado se acercan al valor verdadero del estado (modelo matemático del MCI) a medida que aumenta  $N_p$ . De esta manera, se comprueba la ley fuerte de grandes números.

**Figura 4-12:** Estimación del filtro con diferente número de partículas.



**Figura 4-13:** Estimación del filtro de partículas con diferente número de partículas.

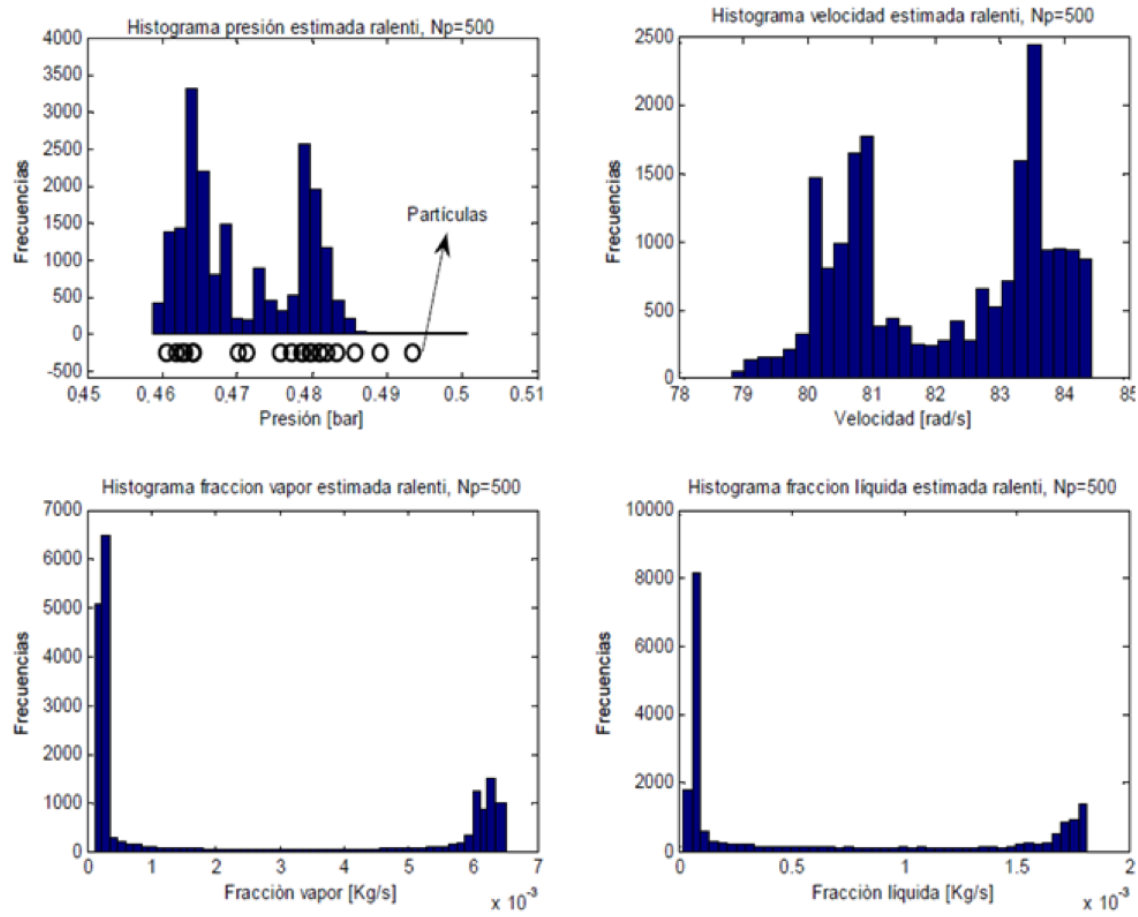
## 4.7. ESTIMACIÓN DEL ESTADO CON REGLA DE BAYES VIA APROXIMACIONES MUESTREO MONTE CARLO.

El histograma acumulado que se muestra en la Fig. 4-14, muestra las concentraciones de masa de la probabilidad de los cuatro estados del MCI al final de la estimación del filtro de partículas. En la parte superior izquierda de esta figura se quiere resaltar el comportamiento gaussiano de la densidad de la estimación de la presión durante el intervalo probable de la variable aleatoria. Así mismo, se quiere explicar a través de las partículas allí dibujadas como se corresponde la acumulación de ellas con las zonas de más alta densidad de la probabilidad. Este resultado es un reflejo final de la propagación de partículas realizadas por muestreo Monte Carlo las cuales son actualizadas vía la regla de Bayes, en la cual se realiza la predicción incluyendo las observaciones. Las observaciones (mediciones) para el MCI fueron la velocidad y la presión, variables de estado  $x_1, x_2$  medibles.

Se observa adicionalmente en la Fig. 4-14, que las zonas de más alta probabilidad para la presión, se concentran en intervalos donde la variable presenta una tendencia, es decir, si se observa la dinámica del estado en régimen ralentí reflejada por el modelo en la Fig. 4-10 se puede pensar en una línea de tendencia en 0.48 *bar* para los 5 primeros segundos y en 0.465 *bar* entre los 10 y los 15 segundos de la simulación; lo cual se corresponde en el histograma de la presión con la zona de mayor concentración de partículas y por lo tanto de estimación casi segura de la variable.

Otra consecuencia importante de resaltar sería las diferencias de distribución en probabilidad para los cuatro estados estimados a pesar de que se utiliza para la predicción el mismo número de partículas para todas las variables,  $N_p = 500$ . Observar en la Fig. 4-14 que la presión y la velocidad concentran la probabilidad en zonas de tendencia, mientras que la propagación de partículas con muestreo Monte Carlo de los flujos de vapor liquido de combustible genera predicciones más distribuidas en todo el intervalo de la probabilidad de la variable, esto puede obedecer al hecho de que el modelo de estas variables es teórico y se incorporó al modelo completo del MCI el cual incluye la presión y la velocidad que son modelaciones provenientes de variables con incertidumbres reales producidas por los aparatos de medición.

En la Fig. 4-15 se muestran los histogramas en régimen acelerado de los estados estimados. De la misma forma se puede comparar con la presión del modelo en la Fig. 4-11 y observar que las concentraciones de masa están en la zonas de estado estable de la respuesta del estado del modelo. Igualmente sucede para los demás estados.



**Figura 4-14:** Histograma de la estimación de los estados en ralenti con  $N_p = 500$

#### 4.8 COMPARACIONES ENTRE EL PRIMER MOMENTO DE LA PDF DEL ESTADO ESTIMADO CON EL PRIMER MOMENTO DE LA PDF DEL ESTADO VERDADERO

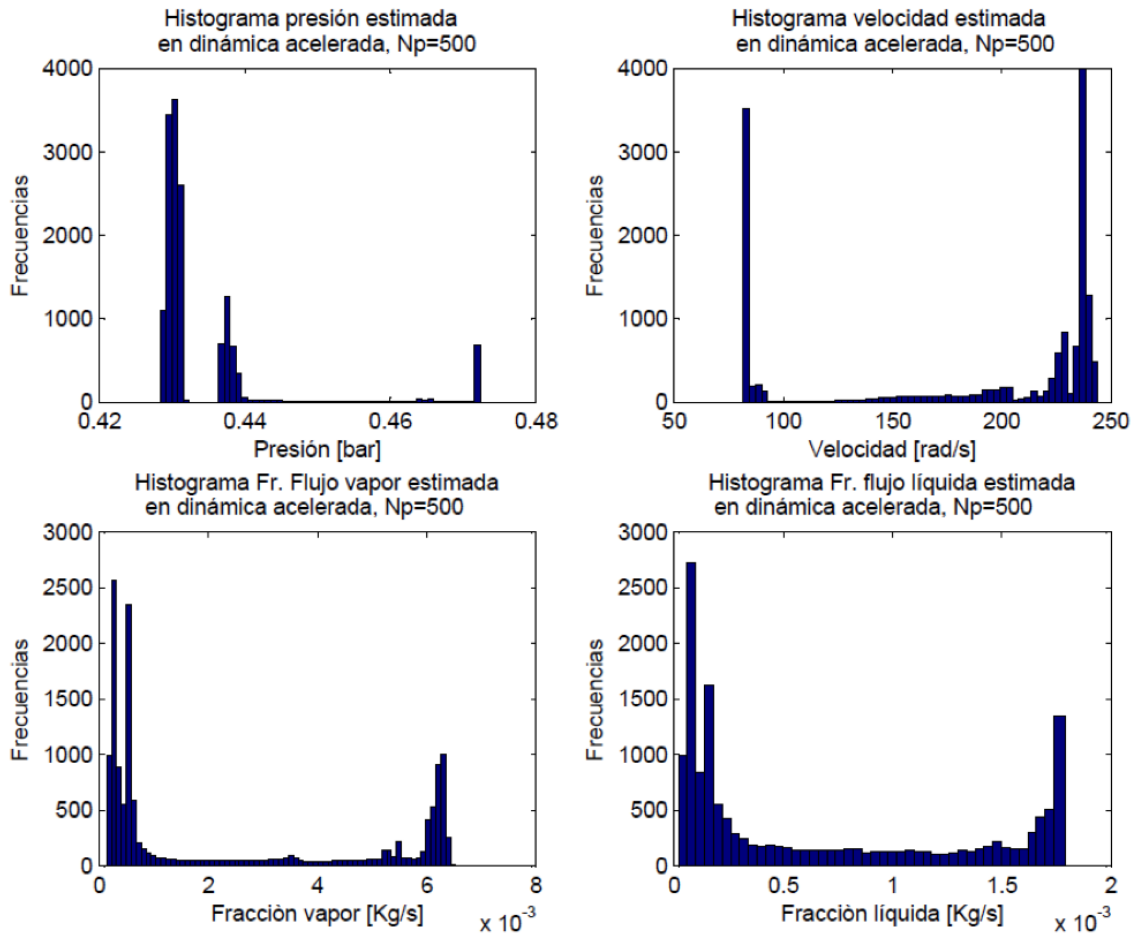
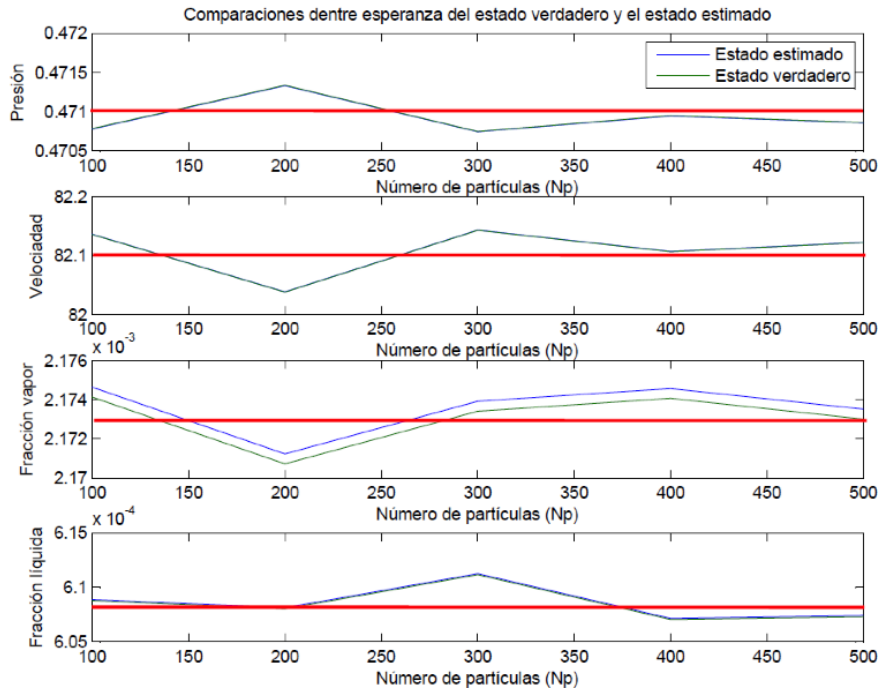


Figura 4-15: Histograma de la estimación de los estados en aceleración con  $N_p = 500$

#### 4.8. COMPARACIONES ENTRE EL PRIMER MOMENTO DE LA PDF DEL ESTADO ESTIMADO CON EL PRIMER MOMENTO DE LA PDF DEL ESTADO VERDADERO

En la Fig. 4-16 se muestra la media de las estimaciones del estado estimado y la media del estado verdadero versus el conjunto de partículas ( $N_p$ ) utilizadas en cada ejecución del filtro. Adicionalmente, se grafica la media del estado verdadero (línea roja), con el fin de generar un referente comparativo para medir la convergencia del filtro a medida que aumenta  $N_p$ .

En la gráfica de presión y velocidad se puede observar que a medida que  $N_p$  aumenta la aproximación Monte Carlo (estimación) y la verdadera (modelo matemático) se vuelven más exactas y tienden al valor medio verdadero. Sin embargo, no se puede afirmar lo mismo para la fracción de flujo de vapor y para la fracción de flujo líquido de combustible. La estimación de la primera se mueve alrededor de la media verdadera a medida que  $N_p$  aumenta, sin mostrar una tendencia a medida que  $N_p$  aumenta. La estimación de la fracción de flujo líquido comienza muy cercano a la media verdadera, luego se aleja a mayor aumento de partículas dedicadas para la estimación y finalmente, con el incremento de  $N_p$  de 400 a 500 vuelve acercarse a la media verdadera. De esta manera, no se concluye para estas dos últimas estimaciones la ley fuerte de los grandes números.



**Figura 4-16:** Comparación entre la esperanza del estado estimado con la esperanza del estado verdadero.

# Conclusiones y Recomendaciones

Se obtiene un modelo matemático analítico de tiempo continuo y de tiempo discreto del MCI, para el cual se realizaron aproximaciones a los cálculos de las eficiencias volumétricas y térmicas de la máquina, obedeciendo los primeros principios, mediante el uso de herramientas como regresión por mínimos cuadrados no lineales y aplicando la ecuación de rendimiento térmico, respectivamente; logrando un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales a ser resueltas por medio de un método de solución numérica. Con ello, se construyó un espacio de estados que permite analizar el problema desde la perspectiva de control. Adicionalmente, se tomaron las dinámicas instantáneas (dado que cambian respecto al ángulo del cigüeñal del motor) correspondientes a los flujos másicos de fase vapor y líquido del combustible en la máquina (variables inobservables) y se acoplaron al primer modelo de variables continuas; esto no había sido así planteado en la literatura y representa un aporte para el desarrollo de la fase posterior del trabajo.

Se valida el modelo usando datos experimentales tomados del banco de pruebas construido para el desarrollo del trabajo. Se calcula el nivel de exactitud para el modelo propuesto del MCI, mediante la comparación de los errores relativos y absolutos obtenidos con los datos del sistema real. Los errores relativos definieron exactitudes entregadas cercanas y superiores al 90 %. El modelo puede ser modificable en cuanto para ciertos parámetros, con el fin de generar una adaptación a otros tipos de motores siempre y cuando pertenezcan a la clase de motores de combustión interna de ciclo Otto. Se mide la robustez del modelo con un estímulo de aceleración después del estado estable en ralentí y, el modelo responde muy bien en el estado transitorio de la respuesta continua. Es recomendable aumentar la exactitud del modelo analizando más profundamente la incidencia de ciertos parámetros internos en el comportamiento general de la máquina.

Con base en el modelo construido y validado, se plantea el problema de la estimación de los estados de dinámica instantánea del motor. Este fenómeno ocurre dentro de la cámara de combustión durante un ciclo de la máquina, y desarrollar un sensor o un grupo de sensores que permitan medirlas es un problema de instrumentación y desagregación tecnológica difícil. Los filtros de partículas han sido hasta ahora una herramienta de uso en la estimación de estados en problemas con características no lineales y no gaussianos; en este caso, el motor de combustión posee características de no linealidad y gaussianidad.

El filtro de partículas o “bootstrap” desarrollado, se implementa en Matlab y se corre sobre la misma plataforma de simulaciones del modelo matemático del MCI (se anexa el código). Los resultados de la estimación total del estado del “bootstrap” corroboran la ley fuerte de grandes números, esto se apoya a través de las desviaciones estándar de la estimación del estado; por tanto, El filtro sigue en forma adecuada al modelo generando desviaciones más pequeñas a medida que se aumenta el número de partículas muestreadas para el paso de actualización de la posterior. Adicionalmente, las concentraciones de masas de la probabilidad mostradas mediante los histogramas nos dan una idea de la propagación de las muestras durante la estimación del filtro. Se encuentra que el comportamiento del primer momento de la PDF para los estados de presión y velocidad angular tiende al valor verdadero a medida que aumenta el número de partículas muestreadas del modelo probabilístico del MCI.



# Anexos A

## Conceptos

### Álgebras

Un sistema de  $\mathcal{A}$  subconjuntos de un espacio muestral  $\Omega$  es llamado un álgebra si:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii) Para algún finito  $n < \infty$  y para algún subconjunto  $A_i \in \mathcal{A} (i = 1, \dots, n)$   
$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$
- (iii) Para todo  $A_i \in \mathcal{A}$  su complemento  $\bar{A}$  es también de  $\mathcal{A}$
- (iv)  $\emptyset \in \mathcal{A}$

### Sigma álgebras ( $\sigma$ -álgebra)

La colección  $\mathcal{F}$  es llamada  $\sigma$ -álgebra o un espacio de eventos si:

- (i) No es vacío:  $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- (ii) Es un álgebra
- (iii) Para alguna secuencia de subconjuntos  $\{A_i\}$ , con  $A_i \in \mathcal{F}$  se sigue:  
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Un proceso  $\{x_t, t \in T\}$  está adaptado a  $\mathcal{F}$ , si es  $\mathcal{F}$ -medible para todo  $t$ . Es decir, que se puede establecer una medida dentro de la sigma álgebra  $\mathcal{F}$ . El  $\sigma$ -álgebra generado por el proceso  $x_n, 0 \leq n \leq t$  se escribe como  $x_t = \sigma$ .

## Espacio de probabilidad.

La tripleta ordenada  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es llamada un espacio de probabilidad si:

- $\Omega$  es un espacio muestral.
- $\mathcal{F}$  es un  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos medibles (eventos) de  $\Omega$ .
- $P$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{F}$ , esto es,  $P$  satisface los axiomas de Kolmogorov.

## Ley de probabilidad de un procesos estocástico.

Sea  $\{x_t, t \in T\}$  un proceso estocástico. Para algún conjunto finito  $\{t_1, \dots, t_n\} \triangleq \{t_i\} \in T$ , determinar la distribución finita dimensional:  $F(x_{t_1}, \dots, x_{t_2})$  o la función de densidad conjunta:  $p(x_{t_1}, \dots, x_{t_2})$  para todos los conjuntos finitos  $\{t_i\} \in T$ , significa especificar la ley de probabilidad del proceso estocástico.

## Convergencia en media cuadrática.

La secuencia aleatoria  $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$  se dice que converge a  $x$  en media cuadrática si:  $E\{x_n|^2\} < \infty$  para todo  $n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{x - x_n|^2\} = 0$ , se llama a  $x$  el límite en la media de  $\{x_n\}$ .

## Criterio de Cauchy.

Una condición necesaria y suficiente para convergencia en media cuadrática es el criterio de Cauchy, el cual establece:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E\{x_n - x_m|^2\} = 0$$

Es decir que la secuencia  $\{x_n\}$  tiene un límite media cuadrática.

## Proceso de Markov.

Un proceso estocástico  $\{x_t, t \in T\}$  de parámetro continuo o discreto es llamado un proceso de Markov si, para algún conjunto paramétrico finito  $\{t_i : t_i < t_{i+1}\} \in T$ , y para cada real  $Pr\{x_{t_n}(\omega) \leq \lambda | x_{t_1}, \dots, x_{t_{n-1}}\} = Pr\{x_{t_n}(\omega) \leq \lambda | x_{t_{n-1}}\}$ .

## Ruido Blanco.

Un ruido blanco  $\{x_t, t \in T\}$  es un proceso de Markov para el cual:  $p(x_t | x_\tau) = p(x_t)$  con  $t > \tau \in T$ , es decir, todos los  $x_t$  son mutuamente independientes para todo  $t \in T$ .

## Movimiento Browniano o proceso Wiener-Lévy.

Un proceso de parámetro continuo  $x_t, t \geq 0$  es un proceso de movimiento Browniano si:

- (i)  $\{x_t, t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes estacionarios.
- (ii) Para cada  $t \geq 0$ ,  $x_t$  es normalmente distribuida.
- (iii) Para cada  $t \geq 0$ ,  $Ex_t = 0$ .
- (iv)  $Pr\{x_0 = 0\} = 1$

## Ley fuerte de los grandes números.

Sean  $x_1, \dots, x_n$  una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media  $\mu$ , Entonces:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{c.s.} \mu \text{ Con "c.s." (casi seguro).}$$

## Anexos B

### Código del filtro de partículas o “bootstrap”.

#### Programa Principal

```
% =====  
  
% Este es el programa principal, el cual se encarga de inicializar  
% variables, correr el filtro para cada instante de muestreo del modelo del  
% sistema y generar los diferentes gráficos.  
  
% =====  
% Inicializar parámetros y estados del Motor  
% =====  
clear all  
inicializa_modelo  
workspace  
clc  
% =====  
% Aquí se corre el modelo matemático del motor de combustión de  
% inyección y entrega el mejor modelo. Es un sistema dinámico no  
% lineal discretizado mediante Euler, el cual presenta 4 variables de  
% estados [x1 x2 x3 x4] y 2 observaciones o salidas [y1 y2].  
% =====  
x_ent=[];           %Inicializa vector de estados verdaderos  
x_sal=[];           %inicializa el vector de salida del paso de la predicción  
x_m=[];             %Inicializa vector del paso de actualización  
x_est=[];           %Inicializa vector de estados estimados (la predicción)  
x_media=[];  
pesos=[];           %Inicializa vector de pesos de importancia  
x_ent(1,:)=[x1 x2 x3 x4 x5]; %vector de estados en el paso de tiempo inicial  
u=[u1(:,1) u2(:,1)]; % vector de entradas en el paso de tiempo inicial  
N=11001;            % Número de pasos de tiempo
```

```

Np=400;           % Número de partículas
Q=10^(-6);       % Matriz de varianzas del proceso
R=10^(-5);       % Matriz de varianzas de las observaciones
y=[Pm omega];
parametros_motor=[eficiencia_vol_omega_Pm,efi_conver,lambda,Pm];
disp('comienzo')
tic

for i=1:N-1
W=Q*randn(length(N),5); %Ruido gaussiano para el sistema con varianza
[x_sal]=modelomotor(x_ent(i,:),u(i,:),parametros_motor(i,:),w);
%calcular vector de estado verdadero en el paso de tiempo i
x_ent=[x_ent;x_sal]; % Contiene la salida del modelo

[muestras,q]=bootstrap(x_sal,u(i,:),y(i+1,:),parametros_motor(i,:),R,Q,Np); %
Se realiza la estimación del filtro
x_m=[x_m;muestras]; % Se acumula la estimación del filtro
x_media=mean(muestras); % Se obtiene el estado a posteriori o la predicción,
este contiene la solución al problema de filtrado
x_est=[x_est;x_media]; % Se acumula el resultado de la predicción, , este
contiene la solución total al problema de filtrado.
pesos=[pesos;q]; % Se acumulan los pesos de importancia
end
x_est=[x_est;x_est(length(x_est),1) x_est(length(x_est),2)
x_est(length(x_est),3) x_est(length(x_est),4) x_est(length(x_est),5)];
% Cálculo de la desviación estandar del estado posterior
x_std=std(x_est);
% Función de Cálculo de la MAP (moda) de los estados
MAP_estados
graficos
toc
tiempogastado=toc;
disp('termina')
saveacel_bootstrap_NP400_N11001_Q10(-6)_R10(-5)

```

#### FUNCIONES Y SCRIP

```

function [ x_sal] = modelomotor(x_ent,u,parametros_motor,w)
%
=====
% PROPOSITO: Esta funcion desarrolla el modelo matematico del motor de
combustión
%           interna.
% ENTRADAS: - x_ent = Estados [x1 x2 x3 x4 x5].
%           - u     = Entradas de control [u1 u2].
%           - eficiencia_vol_omega_Pm = eficiencia volumétrica del motor
dependiente de los estados.
%           - efi_conver = eficiencia térmica de la conversión química a
mecánica.
%           - lambda = señal que mide la eficiencia de la combustión.

```

```

%          - Pm = Presión en el múltiple de admisión.
%          - w = señal de ruido del proceso con distribución
%              gaussiana.[w1 w2 w3 w4 w5]
%          - v = señal de ruido en las observaciones con distribución
%              gaussiana.

% SALIDAS: - x_sal = Vector de Estados del modelo

% Parámetros del motor

Vd=0.001149;          %Volumen desplazado, (r=Vd+Vc/Vc, 9.65=r, metro
cúbico, cilindrada 1149 cc
Vc=0.0001723;        %Volumen comprimido, metro cúbico.
Vm=0.000564;         %(ELECTRONIC ENGINE CONTROL TECHNOLOGIC)
=====> a estimar, Volumen del múltiple, motor 2.8 l
k_isen=1.4;          %Coeficiente isentrópico 1.37 si mezcla de
combustible y aire, 1.4 si aire fresco
Ts=1*10^-3;         % Periodo de muestreo (s). del artículo de
MelgaardtHendricks
R=286.9;             %(J/kg.*K), constante universal gases
Tm=305;              %(*K) (ELECTRONIC ENGINE CONTROL
TECHNOLOGIC)=====> a estimar, Temperatura en el
múltiple
Patm=85113;          %(Pascuales), Presión atmosférica Medellín ojo en
Pa multiplico *10^5, 0.85 bares
Tamb=298.15;         %(*K), Temperatura ambiental
alpha_0=2;           %(*) %
Hendrick=====> a estimar, ángulo con área mínima
K_iny=2.5*(10^-6)/2; % Se toma del datasheet del inyector del
tomega_rale_raleingo (kg/ciclo)
tiny_rale=3.3;       % esta en ms Se saca un promedio con la señal de
inyección en marcha mínima o ralenti(s)
tm=0.6;              % esta ms Se saca del datasheet del inyector, es
el tiempo muerto.
omega_rale=790*2*pi/60; % Velocidad marcha mínima (rad/s)
m_Psi_rale=K_iny*(tiny_rale-tm)*omega_rale; % m_Psi(kg/s)=K_iny(tiny-
tm)*omega*10^-6/120, tí[ms], K_iny[mg/ms], flujo másico inyectado en ralenti
m_diablito
Hu=43000*10^3;       % poder calorífico inferior de la gasolina (J/kg),
tomado de google.
Inercia=5.264;        % (kg-m^2) tomado de Guzzella para un motor de
2.8 l .
X=0.22;              % Fracción líquida del combustible inyectado,
tomado a partir del promedio del artículo de Hendricks
Torque_l=0;          % Torque a marcha mínima en vacío [kgm]
L=14.67;             % Tomado de Melgaard&Hendricks
d=0.038;             % Diámetro de la mariposa (d=0.031de Hendrick y
con los mínimos cuadrados 0.038)
A0=1.5975e-005;      % tomado de Guzzella (5.3*10^-6), estimado:
1.5975e-005
m_betha=6.5323e-004; % lo puse de prueba sacado así:

```

```

m_betha/m_diablito*L=lambda;Estem_diablito es el inyectado no el que
reacciona, se debe cambiar
T_fv=0.0902;           % tomado de deMelgaard&Hendricks para unas rpm de
2931
T_fl=0.211;           % tomado de deMelgaard&Hendricks para unas rpm de
2931
Pe=1.08*10^5;         % tomado de Guzzella en pascales
x1_ent=x_ent(1);
x2_ent=x_ent(2);
x3_ent=x_ent(3);
x4_ent=x_ent(4);
x5_ent=x_ent(5);
u1=u(1);
u2=u(2);
eficiencia_vol_omega_Fm=parametros_motor(1);
efi_conver=parametros_motor(2);
lambda=parametros_motor(3);
Fm=parametros_motor(4);
% =====
% Estos datos trabajan con el flujo de combustible que reacciona dentro del
% cilindro, el cual tiene dos contribuciones parte vapor parte líquida.
% aquí se calcula las eficiencias a partir de los datos reales y las
% mezcla con las variables de estado y usa el malfa estimado.
% =====
% Se plantea el modelo acoplado, es decir, los estados x3 y x4 afectados por
% el estado x2 mediante la variable combustible inyectado u2.
% Por tanto, u2(i)=u2(i)*x2(i)
% =====
if u2>=0.01959
    u2=0.01959;
end
if x1_ent/Patm<0.5,
    incert1=2.05;% es para el Vm
        incert2=4000;%1000;%4000;% es para el Patm (pascales porque es una
unidad muy grande)
        incert3=2000;%2000;% divide el calor específico del combustible en el
cálculo del estado 2
A=(Vd*eficiencia_vol_omega_Fm*x1_ent*x2_ent)/(4*pi*Vm*incert1)*(1+(1/L*lambda)
);
    B=(R*Tm*(Patm-incert2))/(Vm*sqrt(R*(Tamb)));
C=((pi*(d^2))/4)*(1-(cosd(u1)/cosd(alpha_0)))+A0;
x1_sal= x1_ent- A*Ts + B*(1/sqrt(2))*C*Ts +w(1);
if x1_sal>5.3e4
    x1_sal=5.3e4 + w(1);
end
    x2_sal=((Hu/incert3)*efi_conver*(x3_ent+x4_ent))/Inercia)*Ts -
(Torque_l/Inercia)*Ts + x2_ent + w(2);
x3_sal= -(1/T_fv)*x3_ent*Ts + (((1-X)/T_fv)*u2*x2_ent)*Ts + x3_ent + w(3);
    x4_sal= -(1/T_fl)*x4_ent*Ts + ((X/T_fl)*u2*x2_ent)*Ts + x4_ent +
w(4);
% Este que sigue es m_fi, que es flujo másico real de combustible
% que ingresa al motor para combustión y generación de energía,

```

```

% extraído del modelo teórico
    x5_sal= x3_sal+x4_sal + w(5);
else
    incert1=0.85;%1.8, 0.8;% es para el Vm
    incert2=4000;%4000;% es para el Patm (pascales porque es una unidad
muy grande)
    incert3=2000;%2000;% divide el calor específico del combustible en el
cálculo del estado 2
% Variables auxiliares para el calculo del estado 1
A=(Vd*eficiencia_vol_omega_Pm*x1_ent*x2_ent)/(4*pi*Vm*incert1)*(1+(1/L*lambda)
);
    B=(R*Tm*(Patm-incert2))/(Vm*sqrt(R*(Tamb)));
C=((pi*(d^2))/4)*(1-(cosd(u1)/cosd(alpha_0)))+A0;
D=sqrt((2*Pm/Patm)*(1-(Pm/Patm)));
    x1_sal= x1_ent- A*Ts + B*D*C*Ts+w(1);
if x1_sal>5.3e4
    x1_sal=5.3e4 + w(1);
end
    x2_sal=((Hu/incert3)*efi_conver*(x3_ent+x4_ent))/Inercia)*Ts -
(Torque_l/Inercia)*Ts + x2_ent + w(2);
x3_sal= -(1/T_fv)*x3_ent*Ts + (((1-X)/T_fv)*u2*x2_ent)*Ts + x3_ent + w(3);
    x4_sal= -(1/T_fl)*x4_ent*Ts + ((X/T_fl)*u2*x2_ent)*Ts + x4_ent +
w(4);
% Este que sigue es m-fi, que es flujo másico real de combustible
% que ingresa al motor para combustión y generación de energía,
% extraído del modelo teórico
    x5_sal= x3_sal+x4_sal + w(5);

end
x_sal=[x1_sal x2_sal x3_sal x4_sal x5_sal];

function [ xk,q] = bootstrap(xk_1,u,y,parametros_motor,R,Q,Np)

% =====
% PROPOSITO: Desarrollar la estimación de los estados del motor mediante
%           el algoritmo bootstrap o filtro de partículas. El cual emplea la
técnica
%           de muestreo por importancia con remuestreo (SIR).

% ENTRADAS: - xk_1 = muestra tomada del modelo del sistema para obtener.
%           muestras de la previa.
%           - u = Entradas de control.
%           - y = Las salidas medidas.
%           - parametros_motor = Son un conjunto de parámetros del modelo
matemático
%           del motor de combustión.
%           - R = covarianza del ruido de la medición.
%           - Q = Varianza del ruido del proceso.
%           - Np = Número de partículas.

```



```

% SALIDAS: -xk = Muestras del estado estimado.
%           - q = Pesos de importancia normalizados.
xu=[];
xp=[];
[fil,col]=size(xk_1);
x_j=zeros(Np,col);
x_j=[x_j(:,1)+xk_1(1) x_j(:,2)+xk_1(2) x_j(:,3)+xk_1(3) x_j(:,4)+xk_1(4)
x_j(:,5)+xk_1(5)];
w=Q*randn(Np,5);
for j=1:Np
xu=modelomotor(x_j(j,:),u,parametros_motor,w(j,:)); % paso de la predicci3n
xp=[xp;xu];
end
q=pesos_importancia(xp,y,u,parametros_motor,R);
xk=actualizaci3n(xp,q);
end

```

```

function [ q ] = pesos_importancia(xp,y,u,parametros_motor,R)

% =====
% PROPOSITO: Calcula los pesos de importancia para el modelo matemático
% objeto de estimaci3n (motor de combusti3n interna)
%
% ENTRADAS:      - xp = Muestras del estado del paso de predicci3n
%                 - y  = Las salidas medidas
%                 - u  = Entradas de control
%                 - parametros_motor = Son un conjunto de parámetros del modelo
matemático
%
%                                     del motor de combusti3n.
%                 - R = covarianza del ruido de la medici3n
%
% SALIDAS:      - q = Pesos de importancia normalizados

[fil,col]=size(xp);
q=zeros(fil,2);
h_k=[];
v=R*randn(fil,2);
for i=1:fil
x_sal=modelomotor(xp(i,:),u,parametros_motor,[0 0 0 0 0]);
h_k=[h_k;x_sal(1,1:2)];
end
h_k=h_k+v;
[fil,col]=size(h_k);
y2=[y(1)*ones(fil,1) y(2)*ones(fil,1)];
for i=1:fil
q(i,:)=(exp(-0.5*(y-h_k(i,:)).^2*[10^(7) 0 ;0 0.01]^(-1)))/(sum(exp(-
0.5*(y2-h_k).^2*[10^(7) 0 ;0 0.01]^(-1))));
q2=isnan(q(i,:));
if q2(1,1)==1
q(i,1)=0;

```

```

else
if q2(1,2)==1
    q(1,2)=0;
end
end
end
end

function [ xk ] = actualizacion(xp,q)

% =====
% PROPOSITO:  Evaluar la "likelihood" de cada muestra previa xp cada vez
%              que se recibe una nueva medición
%
% ENTRADAS:   - xp = Muestras del estado del paso de predicción
%              - q = Pesos de importancia normalizados
%
% SALIDAS:    - xk = Muestras del estado remuestreadas
[fil,col]=size(xp);
xk=[];
ur=rand(fil,2);
U=cumsum(ur);
Q=cumsum(q);
i=1;
j=1;
while j <= fil-1
if (Q(j,:).*U(fil,:))>U(i,:)
xk(i,:)=xp(j,:);
    i=i+1;
%j = j+1;
else
    j=j+1;
end
end

if (isempty(xk))
xk=[xp;xp];
end

if size(xk)==[1,5]
xk=[xp;xp];

end

```

# Bibliografía

- [1] Andrieu, C. and Doucet, A., “Recursive Monte Carlo algorithms for parameter estimation in general state space models” in Proc. IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal Processing, pp. 14–17, 2001.
- [2] Aquino, C. F., “Transient A/F Control Characteristics of the 5 Liter Central Fuel Injection Engine”. SAE Thechnical , Paper No 810494, 1981.
- [3] Bain, A. and Crisan, D., “Fundamentals of stochastic filtering”, Springer, 2009.
- [4] Chen, Z. (2003). “Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond”, Technical report, the Communications Research Laboratory, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.
- [5] de Freitas N, J. F. G. “Bayesian methods for neural networks,” Ph.D. thesis, Dept. Eng., Univ. Cambridge, 1998. Available on line in: <http://www.cs.ubc.ca/~nando/publications.html>. Department of Electrical Engineering Linkoping University, SE{581 83 Linkoping, Sweden, 2003
- [6] de Freitas, J. F. G., Niranjana, M., Gee, A. H., Doucet, A., “Sequential Monte Carlo Methods to Train Neural Network Models”, LETTER Communicated by Steven Nowlan and Gerard Dreyfus, Cambridge University Engineering Department, Cambridge CB2 1PZ, England, U.K.
- [7] Dobner, J. D., “A Mathematical Engine Model for Development of Dinamic Engine Control”, Paper No 800054., 1981
- [8] Gengel, Y. & Boles, M., “Termodinámica”. Mc Graw Hill, ISBN 978-970-10-7286-8, 2008

- 
- [9] Gordon, N. Y., Salmond, D. J., Smith, A. F. M, “Novel Approach to Non Linear-Non Gaussian Bayesian State Estimation” IEE Proceedings F, Abril 1993.
  - [10] Guzzella, L. and Onder, C.H. “Introduction to Modeling and Control of Internal Combustion Engine Systems, Springer, Germany, 2004.
  - [11] Hendricks, E. and Sorenson, S., “Mean Value Modelling of Spark Ignition Engines”. SAE Thechnical., Paper No.900616, 1990.
  - [12] Hendricks, E., “Engine Modelling for Control Applications: A Critical Survey”. In Kluwer Academic Publisher, Meccanica 32, pp 387-396, 1997.
  - [13] Hernández, M and Díaz, A., “Banco de pruebas automatizado para uso en modelación y control de un motor de combustión interna”. Proceedings Of The Fourth Laccei International Latin American And Caribbean Conference For Engineering And Technology, p.1 - , v.1, 2011.
  - [14] Jazwinski, A. H., “Stochastic Processes and Filtering Theory”, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007.
  - [15] Liu, J., Chen, R., “Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems”, Journal of the American Statistical Association, Vol. 93, No. 443, September 1998.
  - [16] Luo, J., Ying, K., Bai, J., “ Savitzky-Golay smoothing and differentiation filter for even number data, Elsevier on Signal Processing, February 2005.
  - [17] Mejía, N. and García, S., “Diseño y Construcción de un Banco de Pruebas para un Motor de Combustión Interna de Renault Twingo”. Tesis de pregrado. Universidad Eafit, 2008.
  - [18] Melgaard, H., Hendricks, E. and Madsen, H. K. “Continuous Identification of a Four-Stroke SI Engine”. Proceedings of the 1990 American Control Conference (ACC), Paper NO. TP10-5:30, San Diego CA, 1990.
  - [19] Poznyak, A., “Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Stochastic Systems”. First Edition, Elsevier, 2009.

- [20] Quintero, O. “Filtros de Partículas en Sistemas Dinámicos no Lineales no Gaussianos: Identificación, Estimación de Estados y Aplicaciones”. Tesis PhD. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan. San Juan, Argentina, 2009
- [21] Rajamani, R. (2006). Vehicle Dynamics and Control. Springer, USA, ISBN 0-387-26396-9.
- [22] Romero, C. and Quintero, H., “Modelado de los Motores de Combustion Interna”. Scientia et Technica, Vol 07 N<sup>o</sup> 15, pp 67-74, 2001.
- [23] Sanjeev, M., Maskell, S., Gordon, N. and Clapp T., “A Tutorial on Particle filters for Online Non Lineal/Non Gaussian Bayesian Tracking” Qinetiq Ltd and Cambridge University Engineering Department report, this is a condensed version of “A Tutorial on Particle filters for Online Non Lineal/Non Gaussian Bayesian Tracking” . IEEE Transactions on signal Processing, Vol. 50, No. 2, February 2002.
- [24] Sensor de torque, [www.ncte.de/PDF/Design&Dimension.eng-V7.pdf](http://www.ncte.de/PDF/Design&Dimension.eng-V7.pdf), febrero 2005.
- [25] Sensor Flujo de aire (MAF) (part number:PBT-GF30), [www.4starelectronics.com/part\\_detail/PBTGF30K](http://www.4starelectronics.com/part_detail/PBTGF30K)
- [26] Shao, X., Huang, B., Lee, J. M., “Constrained Bayesian State Estimation- A Comparative Study and a New Particle Filter Based Approach”. Elsevier on Journal of Process Control, Vol 20, pp 143-157, 2010.
- [27] Smith, A. F. M. and Gelfand, A. E., “Bayesian Statistic Without Tears: A Sampling-Resampling Perspective”, The American Statistician, Vol. 46, No. 2, May 1992.
- [28] Taylor, C. F. and Taylor, E. S. (1970). The Internal Combustion Engin. Scranton: Int. Textbooks Co.
- [29] Using LabView Version 2009, National Instrument Inc, 2010
- [30] Using Matlab Versión R2011a, Math Works Inc, 2011.
- [31] Yuz, J.I., “Sampled-data Models for Linear and Nonlinear Systems”. PhD thesis. School of Electrical Eng. and Computer Science, The University of Newcastle. Australia, 2005.